4차원 다양체의 분류에 관한 연구

글_ 박경배·고등과학원 수학부 연구원

수학에서 분류문제(Classification problem)는 구체적으로 규정된 수학적 대상들을 특정한 동형조건에 따라 완벽히 나열하는 문제를 말한다. 이러한 분류문제는 수학의 다양한 분야에서 가장 기본적이면서도 어려운 문제라고 여겨진다. 예를 들어 모든 동형인 유한단순군(finite simple group) 완벽히 분류해낸 것은 20세기 대수학의 가장 위대한 업적 중의 하나로 꼽히고 있다.

공간의 구조를 연구하는 위상수학에서도 활발한 연구 주제 중의 하나가 다양체(manifolds)를 분류하는 문제이다. n차원 다양체는 간단히 이야기하면 어느 점에서나 n차원 직교좌표계와 같이 보이는 위상 공간을 이야기한다. 예를 들어 구면은 2차원 다양체의 한 예라고 할 수 있다. 두 개의 위상다양체 사이에 연속 전단사 함수가 존재하면 두 다양체가 위상동형이라고 하며 무한히 미분 가능한 연속 전단사 함수가 존재할 때 두 매끈한 다양체는 매끈한 위상동형이라고 한다. 흔히 위상수학을 머그컵과 도넛을 같게 생각하는 수학 분야라고 이야기를 하는데 이는 머그컵과 도넛의 표면이 2차원 다양체로서 위상동형이기 때문이다. 모든 '방향을 줄 수 있고 닫힌(경계가 없고 옹골찬) 2차원 다양체'는 구면과 구멍이 여러 개 있는 도넛의 표면 중의 하나와 위상동형이 될 수밖에 없다는 것임을 어렵지 않게 증명할 수 있다. 또한 구멍의 개수(genus)는 2차원 다양체의 위상불변량이므로 구멍의 개수가 서로 다른 두 2차원 다양체는 서로 위상동형이 아님을 알 수 있다. 결국 '방향성을 줄 수 있고 닫힌 2차원 다양체'는 구멍의 개수라는 위상 불변량을 통해 완벽히 분류됨을 알 수 있다.

지난 수십 년 동안 많은 위상수학자가 '방향성이 있고 닫힌 4차원 다양체'에 대해서도 위의 2차원 다양체의 예처럼 완벽하게 분류하기 위해 노력해왔다. 단순연결이며(기본군이 0 인) 이러한 4차원 다양체는 1980 년대 초반 필즈메달리스트인 Freedman 에 의해 교차 형식(intersection form)이라는 4차원 다양체의 위상불변량에 의해 완벽히 분류되어짐이 증명되었다. 즉 모든 정수 위의 대칭이중선형형식(unimodular symmetric bilinear form over the integers)은 그 형식을 교차형식으로 갖는 4차원 위상 다양체가 존재하며 동형인 교차형식을 가지는 두 매끈한 4차원 다양체은 서로 위상동형이다. 하지만 비슷한 시기에 매끈한 위상동형으로 4차원 다양체를 분류할 경우 Freedman 의 결과와는 큰 차이가 있음이 또 다른 필즈메달리스트인 Donaldson 에 의해 알려지게 되었다. 그는 많은 대칭이중선형형식들이 매끈한 4차원 다양체의 교차형식이 될 수 없음과 서로 위상동형이지만 매끈한 위상동형이 아닌 4차원 다양체가 존재함을 증명하였다.

그 이후 위상동형과 매끈한 위상동형의 차이는 4차원 위상수학 분야의 주요 연구 주제가 되었으며 게이지 이론은 이용한 4차원 다양체 불변량과 매듭 수술 등을 비롯한 다양한 4차원 건설 방법의 발전을 통해 많은 중요한 결과들이 증명되었다. 하지만 4차원 다양체의 분류 문제는 여전히 많은 부분이 미지의 상태로 남아있다. 예를 들어 그동안 많은 경우에 위상동형이지만 서로 매끈한 동형이 아닌 4차원 다양체가 무한히 많이 존재함이 알려졌지만

이러한 같은 위상을 가지는 매끈한 다양체가 완전히 분류된 적은 없다. 또한, 가장 간단한 닫힌 4차원 다양체인, 4차원 구와 위상동형이지만 매끈한 위상동형이 아닌 예가 존재하는지는 여전히 알지 못하고 있으며 이 문제를 4차원 푸엥카레 추측이라고 부르고 있다. 필자는 이러한 닫힌 4차원 다양체의 분류문제를 경계가 존재하는 4차원 다양체의 분류 문제로 일반화하는 데 관심이 있다. 최근의 Frøyshov, Ozsváth–Szabó 등의 연구결과에 따르면 경계가 있는 매끈한 4차원 다양체의 경우 그 경계인 3차원 다양체의 플로어 호몰로지 불변량이 따라 4차원 다양체의 교차형식에 제한을 준다는 사실이 알려졌다. 3차원 다양체의 불변량 계산과, 그를 통한 4차원 다양체의 분류하고, 실제로 그러한 성질은 가지는 4차원 다양체를 건설하는 것이 주된 연구의 방향이 될 것이다. 이는 기존의 닫힌 4차원 다양체의 분류 문제 뿐 아니라 4차원 사교 기하학, 매듭 불변량 연구 등으로 응용되리라 기대된다.

참고자료

[1] Frøyshov, Kim A. The Seiberg-Witten equations and four-manifolds with boundary. Math. Res. Lett. 3 (1996), no. 3, 373–390.

[2] Gompf, Robert E.; Stipsicz, András I. 4–manifolds and Kirby calculus. Graduate Studies in Mathematics, 20. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. xvi+558 pp. ISBN: 0–8218–0994–6

[3] Ozsváth, Peter; Szabó, Zoltán Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four–manifolds with boundary. Adv. Math. 173 (2003), no. 2, 179–261.

[4] Stern, Ronald J. Will we ever classify simply–connected smooth 4–manifolds? Floer homology, gauge theory, and low–dimensional topology, 225–239, Clay Math. Proc., 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.