

나선면(Helicoid)의 특성에 관한 연구

● 글_이은주 ·고등과학원 수학과 연구원

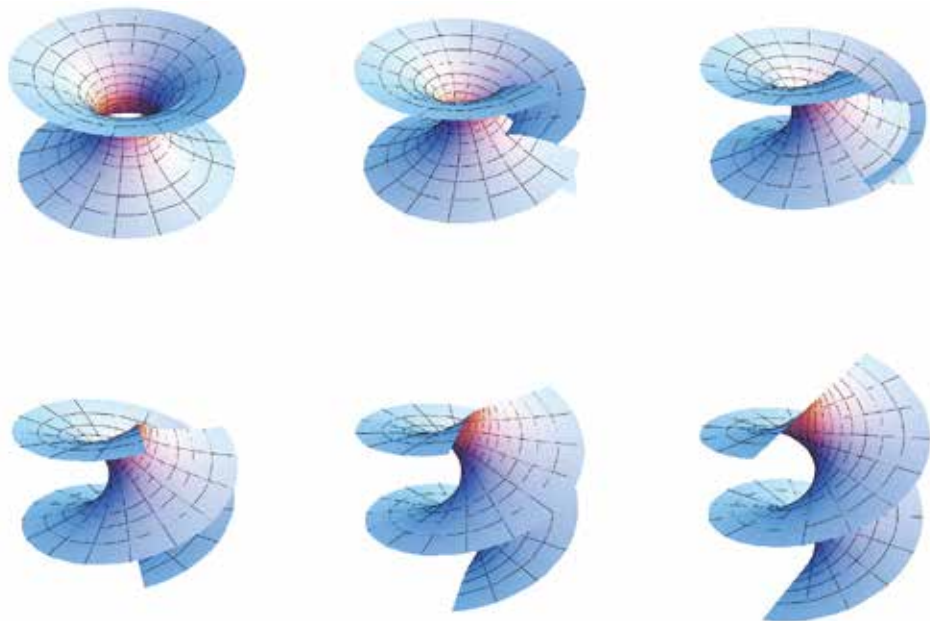
자연은 수학이라는 언어로 쓰여있다. -갈릴레오 (Galileo Galilei, 1564-1642)

주어진 곡선을 경계로 하며 넓이가 최소가 되는 곡면을 찾는 문제는 수학뿐만 아니라 물리학, 생물학, 건축학, 공학 등의 여러 분야에서 중요한 주제이다. 우리가 자연에서 쉽게 접할 수 있는 곡면들이 왜 그런 '특정한' 모양을 띠어야 하는지, 그리고 그 배후에 숨어있는 자연법칙은 무엇인지를 탐구하는 실마리가 되며, 더 나아가 건물을 짓거나 기계를 설계할 때 어떤 모양을 따르는 것이 보기 좋고도 안정적이며 비용을 줄일 수 있는지를 알아내는 이론적 배경이 되기 때문이다.

평균 곡률(mean curvature)이 0인 곡면으로 정의되는 극소 곡면(minimal surface)은 이러한 최소 넓이 곡면의 강력한 후보이다. 왜냐하면, 극소 곡면의 정의는 넓이 함수의 극값(critical value)이라는 것과 동치이기 때문이다. (따라서 최소 넓이 곡면은 극소 곡면 중에서 찾으면 된다고 할 수 있다.) 이런 성질 외에도 극소 곡면의 다른 성질들을 밝혀내는 것은 그 자체로 의미 있는 작업일 뿐만 아니라 물리학 등 다른 분야에도 응용될 수 있다는 점에서 중요하다. 한가지 예로서 안정적인(stable) 극소 곡면이 존재한다는 성질로부터 일반 상대성 이론의 양의 에너지 정리(positive energy theorem)나 블랙홀의 존재 정리 등이 증명되었다.

나선면(helicoid)과 현수면(catenoid)은 삼차원 유클리드 공간에 있는 극소 곡면 중 가장 대표적인 두 극소 곡면들이다. 나선면은 직선을 이와 수직인 다른 직선 위로 나사 돌리듯 돌려 올려서 얻어지는 곡면이고, 현수면은 현수선(catenary)을 준선(directrix)을 축으로 한 바퀴 돌려 얻어지는 곡면이다. 나선면과 현수면이 극소 곡면이 되는 것도 신기하지만, 더욱 놀라운 것은 전혀 다르게 생긴 이 두 곡면이 국소적으로 합동(locally isometric)이라는 것이다. 구체적인 수식으로 나타낼 수 있는 복소함수를 이용하면 아래 그림에서 보이는 바와 같이 국소적으로는 나선면을 자르거나 늘이지 않고 현수면으로 바꿀 수 있다는 것을 알 수 있다.

현수면의 재미있는 성질 중 가장 최근에 알려진 것으로는 서로 평행한 두 평면에 경계를 두며 그 사이(slab)에 존재하는 극소 원환면(minimal annulus) 중 넓이가 최소가 되는 곡면은 현수면의 일부가 되어야 한다는 정리가 있다 [BB]. 앞서 언급한 현수면과 나선면의 관계를 떠올리면 비슷한 성질이 나선면에 대해서도 성립하지 않을까를 자연스럽게 추측할 수 있는데, 필자는 지난해 이와 관련된 결과들을 증명하는 데 성공하였다 [L]. 구체적으로 말하자면, 반지름과 높이가 유한



[그림] 나선면에서 현수면으로의 변형(deformation)

한 원기둥의 위아래 지름과 옆 면에 경계를 두며 원기둥 내부에 있는 곡면 중에서 넓이가 최소가 되는 것은 나선면의 일부가 될 것인가의 문제인데, 원기둥의 높이가 높을 경우 자명한 반례(trivial counterexample)가 존재하게 된다. 다행히 원기둥의 높이가 기하학적인 의미가 있는 어떤 값을 넘지 않게 되면 나선면이 최소 넓이 곡면이 된다는 것을 증명할 수 있었고, 높이에 대한 상한이 없는 경우는 원기둥의 중심축을 지나는 곡면 중에서 최소 넓이 곡면을 찾는다면 같은 결과를 얻을 수 있음도 증명하였다.

극소 곡면의 성질을 규명하고 분류하는 또 하나의 중요한 기준이 바로 유일성(uniqueness)이라고 할 수 있는데, 나선면의 유일성과 관련해서는 중요한 결과들이 많이 알려졌다. 몇 가지만 소개하자면 나선면은 평면을 제외한 유일한 극소 선직면 (ruled surface)이고 [C], 평면의 두 평행선을 경계로 하는 영역 내부에서 그래프로 주어지는 유일한 극소 곡면이다 [CK]. 또한, 단순 연결되어 있고 (simply-connected) 자가 교차점이 없는(without self-intersection) 평평하지 않은(non-planar) 완비 극소 곡면(complete minimal surface)은 나선면 밖에 없다는 것도 증명되었다 [MR].

이와 관련하여 필자는 원기둥의 위아래 지름과 옆 면에 경계를 두며 원기둥 내부에 있는 곡면 중에서 옆 면의 경계 곡선이 이중 나선(double helix)인 곡면은 반드시 나선면의 일부가 되어야 할 기하학적인 조건들을 찾을 수 있었다. 또한, 옆 면에 생기는 경계 곡선이 나선이 아닌 일반적인 곡선인 경우에도 두 곡선이 중심축에 수직이며 곡면도 옆 면에 수직인 곡면은 나선면과 합동이 되어야 한다는 것도 증명하였다 [L].



열매를 보면 나무를 안다는 말처럼, 공간에 놓여 있는 곡면의 성질을 알아냄으로써 그 공간 자체도 이해할 수 있다고 볼 수 있다. 현재 필자는 차원이 높은 유클리드 공간과 비-유클리드 공간 안에 있는 극소 곡면의 성질들을 특히 나선면에 초점을 두고 연구를 진행하고 있는데, 새롭고도 의미 있는 결과들을 얻어 학문 발전에 기여할 수 있기를 기대해본다.

참고문헌

- [BB] Bernstein, Jacob; Breiner, Christine, A variational characterization of the catenoid, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **49** (2014), no. 1-2, 215–232.
- [C] Catalan, E., Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum, *J. Math. Pure Appl.* **7** (1842), 203-211.
- [CK] Collin, P.; Krust, R., Le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur des domaines non bornés. (French) [The Dirichlet problem for the minimal surface equation in unbounded domains], *Bull. Soc. Math. France* **119** (1991), no. 4, 443–462.
- [L] Lee, E., A Characterization of the helicoid in a cylinder. Thesis (Ph.D.)-Seoul National University, 2013.
- [MR] Meeks, William H., III; Rosenberg, Harold The uniqueness of the helicoid. *Ann. of Math. (2)* **161** (2005), no. 2, 727–758.