수학과 물리학의 작용 반작용

글_최재경·고등과학원 수학부 교수

뉴턴(Isaac Newton)은 그의 운동법칙에서 서로 다른 두 물체 사이에는 작용 반작용이라는 힘의 상호작용이 있다고 말했다. 작용 반작용의 상호관계는 어디 물체 사이뿐이랴. 두 사랑하는 남녀 사이에도 가슴을 뛰게 하는 작용 반작용이 있고, 토인비(Arnold Joseph Toynbee)가 말한 대로 인류 역사발전의 과정에도 도전과 응전이라는 작용 반작용이 있다. 이 글에서는 수학과 물리학 사이에 있었던 여러 가지 작용 반작용의 역사에서 세 가지를 골라 이야기해 보고자 한다.

1. 아인슈타인–포앙카레

뉴턴은 빛을 입자로 보았고 후크(Robert Hooke)와 호이겐스(Christiaan Huygens)는 빛이 파동이라고 해석하였다. 호이겐스는 빛의 파동은 에테르(luminiferous ether)라는 매체를 통해서 모든 방향으로 퍼진다고 설명하였다. 맥스웰(James Clerk Maxwell)은 모든 전자파는 빛의 속도로 퍼지고 빛은 전자파의 일종이라고 밝혔다. 그는 우주 속에서 정지해 있는 에테르를 통해서 전자파가 고정된 빛의 속도로 퍼진다고 말하였다. 그러면 지구가 에테르 속을 어떻게 움직이느냐는 문제에 대해 19세기 말에 여러 가지 실험이 있었다. 이 중에서 마이켈슨(Albert Abraham Michelson)과 몰리(Edward Williams Morley)는 수직 방향으로 분리되는 빛을 간섭시켜 에테르의 존재를 보이고자 하였는데 이들뿐 아니라 대부분의 실험물리학자는 부정적인 결과만 얻었다. 이 난국을 혁신적인 방법으로 타개하려고 시도한 물리학자가 로렌츠(Hendrik Antoon Lorentz)다. 그는 1892년 모든 물체는 에테르 속에서 움직이는 방향으로 길이가 수축한다는 가설을 내놓아 에테르를 구제할 수 있다고 주장하였다. 3년 후 그는 한 걸음 더 나아가 에테르 속에서의 실제 시간(true time)에 비교해서 움직이는 물체의 지엽적인 시간(local time)은 천천히 흐른다고 말하였다. 이와 같은 길이와 시간의 로렌츠 변환은 맥스웰의 방정식과도 잘 부합하였다.

19세기 말 최고의 수학자였던 프랑스의 포앙카레(Jules–Henri Poincaré)는 로렌츠의 이론에 호응하여 자신이 그 이론을 심화하는 데 앞장 섰다. 역사적으로 영국과 식민지 개척에서 치열히 경쟁하던 프랑스는 항해지도의 제작을 위해 경도국(Bureau of Longitude)을 개설했는데 포앙카레는 한 때 그곳의 長이었다. 위도는 북극성의 경사각으로 쉽게 알 수 있지만 경도를 알아내는 문제는 매우 어려웠다. 왜냐하면, 지구가 자전하고 있기 때문에 경도는 전 세계적으로 동시의 시간을 우선 알아야 하고 그때 해의 높이로 그 지역의 경도가 정해지기 때문이다. 그런데 동시의 시간을

정하는 것은 과학사에서 매우 난해한 문제였다. 호이겐스는 목성의 위성 이오가 목성 뒤에서 뜨는 순간을 전 세계 동시로 정하자는 의견을 낸 적도 있다. 포앙카레가 경도국의 일을 하며 자연스럽게 접한 동시 결정방법은 해저 케이블로 보낸 전신을 이용하는 방법이었다. 두 지역이 서로 전기신호를 보낼 때 케이블로 전류가 흐르는 시간을 더함으로써 한 지역의 시간으로부터 다른 지역의 시간을 정하는 방법이다. 실제로 전류가 대서양의 해저 케이블을 지나는 데 0.3초가 걸려 빛의 속도의 20%에 그친다고 한다. 포앙카레는 이 방법에서 전류를 케이블로 보내는 대신 빛을 주고받음으로써 동시를 정하는 방법을 구상하였다. 이 방법을 써서 그는 로렌츠의 지엽적 시간이 바로 다름 아닌 에테르 속에서 움직이는 시계의 시간임을 보였다. 포앙카레는 또 로렌츠 변환이 수학적으로 群(group)을 이룬다고 증명하였다.

동시를 정하는 문제는 대서양 건너편에서도 제기되었다. 19세기 미국은 철도를 건설하는 데 총력을 기울이고 있었다. 철도를 따라 전신주도 세워졌다. 그런데 지역마다 시간을 제각각 정하여 열차운영과 전신교환에 많은 불편이 생겼다. 그래서 1883년 미국 전역을 4개의 시간대로 통일하는 법을 통과시켰다. 이로부터 각 시간대에서 동시의 시간을 가리키는 시계를 만드는 실용적인 문제에 부딪히게 되었다. 같은 시기 유럽에서도 동시로 통제되는 시계의 제작에 골머리를 앓았다. 참고로 1884년 워싱턴에서 프랑스를 뺀 22개국은 영국의 그리니치(Greenwich) 천문대를 지나는 자오선을 0도로 정하는 데 합의하였다.

대학을 졸업한 후 2년 동안 직장을 구하지 못해 힘들었던 아인슈타인(Albert Einstein)은 친구의 도움으로 간신히 스위스 베른의 특허국에 취직하였다. 시계산업이 발전한 스위스에는 세계 각처에서 전기신호로 동시의 시간을 가리키는 시계에 관한 특허출원이 매년 10여 건 제출되었다. 이런 특허출원을 심사하며 아인슈타인은 시간의 동시성 개념을 자연스럽게 탐구해나갔다. 또한, 그는 에테르의 존재에 관한 부정적인 실험결과와 맥스웰 이론에서 코일과 막대가 움직이며 전기를 유도하는 현상을 상대운동으로 설명하는 것에 관해 깊이 생각하고 있었다.

1905년 5월 중순 어느 날, 26살의 아인슈타인은 자주 토론해왔던 친구 베쏘(Michele Besso)를 만나자마자 외쳤다. “시간은 절대적으로 정할 수 없어. 시간과 빛의 속도는 불가분의 관계야!” 한 달 후 그는 ‘운동하는 물체의 전기역학에 관하여’ 라는 제목의 짧은 논문을 완성하였다. 이 논문의 중요한 도입부에서 아인슈타인은 主 시계에서 보내는 빛의 신호로 다른 시계의 시간을 정하는 방법에 대해 다음과 같이 논하였다. ‘主 시계가 정오에 보낸 신호를 다른 시계가 받는 순간 정오로 정하는 방법은 主 시계가 어디 있느냐에 따라 다른 시계의 시간이 달라지므로 바람직하지 않은 것이다. 그러나 主 시계로부터 다른 시계까지 신호가 도달하는 데 걸리는 시간을 정오에 더하여 다른 시계의 시간을 정하는 방법은 主 시계의 위치에 상관이 없으므로 시간의 동시성을 확실하게 정의할 수 있게 해준다.’

아인슈타인은 이렇게 하여서 모든 관성계(등속좌표계)에 독립적인 시간을 도입하였다. 그리고 그는 두 가지의 공리를 세웠다. 모든 관성계에서 진공 중 빛의 속도는 같다, 그리고 각 관성계 속의 관측자는 자신이 정지하고 있는지 움직이고 있는지를 알 수 없다고. 이로부터 아인슈타인은

동시라는 개념은 절대적이지 않고 관성계마다 다르다는 동시성의 상대성, 로렌츠 변환(길이의 수축과 시간의 지연), 질량과 에너지의 동등성($E = mc^2$)을 얻어냈다.

신기하게도 포앙카레의 시간조정 방법은 아인슈타인의 그것과 같다. 그러나 그는 왜 아인슈타인의 상대성이론을 7년 후 죽을 때까지 받아들이지 않았을까? 포앙카레는 이미 뉴턴이 주장한 절대공간과 절대 시간이란 것이 존재하지 않음을 깨달았고 동시성이라는 개념에도 문제가 있음을 간파하였었다. 그뿐만 아니라 그는 유클리드 기하학으로는 물리학을 전통적인 방법으로밖에 기술할 수 없음을 파악하고 있었다. 하지만 그는 에테르가 물리학을 이해하는 데 매우 중요한 도구로 보고 절대 버려서는 안 된다고 주장하였다. 포앙카레와 로렌츠는 에테르 속의 시간이 진정한 시간이고 나머지 시간은 지엽적인 시간이라고 보았다. 하지만 아인슈타인은 에테르의 존재를 부정하며 모든 관성계의 시간이 제각각 진정한 시간이라고 말하였다. 포앙카레와 로렌츠는 로렌츠 변환을 공리로서 도입하였으나 아인슈타인은 시간의 새로운 정의의 부산물로 쉽게 얻어냈다. 그럼에도 불구하고 포앙카레는 아인슈타인의 상대성이론을 로렌츠 변환을 쉽게 설명하는 도구로만 이해했고, 아인슈타인을 물리학의 근본적인 전제인 에테르를 회피하는 물리학자로만 보았다.

반세기 후 드브로이(Louis Victor Pierre Raymond de Broglie)는 대수학자인 포앙카레가 상대성이론을 먼저 발견하여 그 영광을 프랑스에게 돌리지 못했던 것을 애통해 하였다. 아인슈타인의 이론에 포앙카레처럼 근접한 사람이 없었는데 마지막 결정적인 단계를 넘지 못하여 시간과 공간의 깊은 이해와 그에 따르는 영광스런 결론을 아인슈타인에게 내주고 말았다고 애석해 하였다. 드브로이는 포앙카레가 수학자여서 과학이란 논리적으로 같은 여러 이론 중에서 가장 편리한 이론을 골라내는 것으로 보았기 때문이라고 그 이유를 들었다. 또한, 포앙카레가 너무 수학자여서 물리학자의 직관이 부족하고 현실 세계에 무관심했기 때문이라고 하였다. 그러나 'Einstein's Clocks, Poincaré's Maps' 라는 제목의 책에서 저자 갤리슨(Peter Galison)은 드브로이의 그런 견해가 지나치게 편협한 것이라고 말한다. 그에 의하면 포앙카레가 오히려 현실세계에 너무 집중하였다는 것이다. 뉴턴 역학의 시간은 이론적으로 수정할 필요가 있으나 큰 문제 거리는 아니라고 포앙카레가 말한 이유는 빛의 신호전달에서 생기는 상대론적 오차를 경도측정에서 생기는 시간 오차와 같은 부류의 것으로 봤기 때문이라고 갤리슨은 설파한다.

애초에 아인슈타인은 특허국에 가자마자 뜻이 맞는 친구 두 명과 올림피아 아카데미를 결성하여 철학과 과학책을 읽으며 공동관심사를 토론하였다. 그들은 자주 만나 경험론 철학자 흄과 마흐의 책, 포앙카레의 책 '과학과 가설'을 읽으며 심도 있게 논의하고 비판하였다. 마흐가 말하길 시간이란 원초적인 것이 아니고 사물의 운동에서 비롯된 것일 뿐이다, 그러므로 절대 시간이란 존재하지 않고 단지 형이상학적인 개념이라고 하였다. 마흐는 이미 고전역학의 문제점을 직시하였고 상대성이론의 탄생을 재촉하였다고 볼 수 있다. 한편 포앙카레에게는 에테르가 사유의 기반이며 자연현상을 기술하는 미분방정식의 토대이어서 에테르의 존재에 관한 추호의 의심도 하지 않았다. 그러나 아인슈타인에게 에테르는 모든 관성계가 독립성을 갖는 데 걸림돌이 될 뿐이었다. 그래서 그는 마치 불필요한 장치가 있는 특허출원을 퇴짜 놓듯이 에테르를 쓰레기통에 버렸다.

아울러 포앙카레의 조카가 지적했듯이 포앙카레는 평생 탐험과 여행 이야기를 좋아한 나머지 수학과 물리학보다 지리학의 관점에서 상대성이론에 접근하였다는 것이다. 그러나 아인슈타인은 특허국에 출원됐던 동시의 시간을 가리키는 시계 제작기술을 다루면서 동시성이라는 물리학적인 문제에 공학적이며 현실적으로 접근할 수 있었다고 한다. 게다가 19세기의 학자 포앙카레는 19세기 물리학 이론에 심취하여 그것에서 벗어나지 못하였다. 반면에 아인슈타인은 주류 물리학계에 진입하지 못했지만, 기성이론에서 자유로운 풋내기 청년으로서 거침없는 상상력의 날개를 펼쳤다.

그런데 천재 물리학자가 구축한 상대성이론도 한 수학자의 예리한 통찰력이 필요하였다. 이 수학자는 아인슈타인이 취리히 공대에 다닐 때 수업을 들은 민코프스키(Hermann Minkowski)였는데 아인슈타인은 학생 때부터 그를 평범한 수학자라고 깎아내려 왔다. 민코프스키는 기하학을 정수론에 응용하며 업적을 쌓기 시작했다. 그는 포앙카레가 로렌츠 변환을 4차원 기하학으로 해석하는 것을 보고 아인슈타인의 상대성이론에 관심을 쏟기 시작했다. 그리하여 그는 1907년 상대성이론을 4차원 시공간의 기하학으로 멋있게 해석할 수 있음을 발견하였다. 민코프스키는 아인슈타인의 이론을 혁명적이라고 평하며 독일 물리학회 연설에서 선언하길 “이제부터 공간 자체, 시간 자체는 역사의 뒤안길로 사라지고 시공간이라는 개념만이 존재할 것”이라고 하였다. 그는 공간 거리의 제곱 빼기 시차의 제곱을 시공간 거리의 제곱이라는 새로운 거리를 도입하였다. 관성계를 바꿀 때마다 거리는 짧아지고 시간은 늘어나지만 사실 민코프스키의 시공간 거리는 변하지 않고 일정하다는 것이다. 마치 원점을 중심으로 좌표평면을 회전하여도 원점부터의 거리는 일정하듯이 한 관성계에서 다른 관성계로 상대론적 변환을 하는 것은 시공간에서 민코프스키 거리를 보존시키는 회전이라는 뜻이다. 우리 인간이 인식한 시간 자체와 공간 자체는 이 시공간을 각각 1차원 시간축과 3차원 공간에 사영해서 얻은 그림자에 불과하다는 것이다. 마치 플라톤의 ‘공화국’에서 죄수들이 동굴 속에서 벽에 비친 그림자를 실재라고 생각하며 사는 것에 비유할 수 있다고 민코프스키는 말하였다.

민코프스키의 기하학적 해석을 본 아인슈타인은 쓸데없이 수학적으로 복잡하게 만든 것이라며 평가절하하였다. 포앙카레는 시공간 개념이 조그마한 이득을 보기 위해 많은 불편을 감수하는 이론일 뿐이라고 평하였다. 그러나 아인슈타인 주변의 모든 물리학자는 그의 방식보다 민코프스키의 방식으로 상대성이론에 접근하는 것을 선호하였다. 결국, 아인슈타인 자신도 중력이론을 깊이 연구할수록 시공간 개념이 필수불가결임을 깨닫기 시작하였다. 마침내 아인슈타인은 민코프스키에게 깊은 존경을 표하기에 이르렀다. 그러나 이미 때가 늦은 것이 민코프스키는 1909년 44살에 맹장염으로 사망하고 만 것이다. 그때부터 아인슈타인은 민코프스키처럼 물리학적 현상을 4차원 시공간에서 기술하고, 물리학적 결론을 기하학적 정리로 표현하기 시작하였다. 최근에 펜로즈(Sir Roger Penrose)는 민코프스키의 해석 덕분에 상대성이론이 비로소 완성됐다고 평가한다.

관성계에서 특수 상대성이론을 확립한 아인슈타인은 가속계와 중력장으로 그 이론을 확장하기 위한 연구를 시작하였다. 그런 연구에 필요한 것은 민코프스키의 시공간 거리가 점마다 연속적으

로 변하는 일반적인 공간이었다. 그래서 아인슈타인은 이미 모교에서 수학과 정교수가 된 동창생 그로스만(Marcel Grossmann)에게 도움을 요청하였다. 여기서 우리는 새로운 이야기를 시작하기 위해 무대를 바꿀 필요가 있다. 50여 년을 거슬러 어느 여름날 독일의 괴팅겐 대학으로 옮겨가 보자. 28살의 수학자 리만 (Friedrich Bernhard Riemann)은 지도교수 가우스를 포함한 철학 교수진 앞에서 대학강사 자격시험 논문강연(Habilitation)을 하였다. 강연제목은 '기하학의 기본적인 가정에 관하여'이었는데 그는 이 강연에서 수식을 딱 하나만 썼다. 그 이유는 수학자가 아닌 청중 대부분을 위한 것이라기보다 수학을 철학 일부로서 제시하기 위함이라고 후세 사람들은 해석하고 있다. 리만은 이 강연에서 혁신적인 공간개념을 제시하였다. 칸트는 공간이 외부로부터 얻어진 경험적 개념이 아니고 선험적이라고 말하였고 또한 공간은 삼차원으로만 이루어졌다고 단언하였다. 그러나 헤르바르트 (Johann Friedrich Herbart)는 공간은 경험으로부터 얻어지며 인간은 움직임을 통해서 공간개념을 얻는다고 주장하였다. 리만은 공간은 선험적이 아니며, 공간에 작용하는 힘에 근거한 길이개념이 공간을 결정한다고 말하였다. 그러나 삼차원의 공간만 있다는 헤르바르트와 달리 리만은 고차원의 공간도 임의로 존재함을 보였다.

리만은 우선 공간에 좌표계를 도입하고 이 좌표를 이용하여 길이개념을 정의하였다. 그리고 그는 길이함수의 이차 도함수로서 곡률이라는 개념을 공간에 도입하였다. 즉 어떤 두 방향으로의 길이함수를 다른 두 방향으로 미분함으로써 이 네 방향으로의 곡률텐서를 리만의 공간에서 정의한 것이다. 이리하여 길이는 공간에서 넓이, 부피, 각도 등 우리에게 익숙한 개념을 다룰 수 있게 하고 또 공간이 어떻게 굽어 있는가를 알 수 있게 한다. 이렇게 리만이 정의한 공간의 개념은 우리로 하여금 다양한 공간을 다룰 수 있게 해주었다. 고대 그리스 시대부터 뉴턴과 칸트에 이르기까지 우리의 공간이라고 굳게 믿어왔던 유클리드 공간은 리만에 의해 그저 수없이 많은 공간중의 하나로 격하되었다. 볼랴이(Johan Bolyai)와 로바체프스키(Nikolai Ivanovich Lobatchevsky)가 발견한 비유클리드 공간도 리만 공간의 특수한 경우일 뿐이다.

리만의 강연을 듣던 가우스(Johann Carl Friedrich Gauß)는 강연내용의 심오함에 충격을 받았다고 한다. 가우스가 이보다 27년 전 발표했던 2차원 미분기하학의 고전적인 결과를 리만은 유클리드 공간을 뛰어넘어 고차원의 다양한 공간에 확장 가능하다고 보였는바 그의 이러한 대범함에 가우스는 놀랐고, 공간을 물리학적인 실체로 해석한 그의 통찰력에 가우스는 감명받았다고 한다. 그렇지만 리만의 기하학은 자격시험 논문강연 이후 60년간 물리학에 아무 영향을 끼치지 못했다. 사실 리만은 중력, 빛, 복사열, 전자기력의 이해를 염두에 두고 기하학의 기본개념을 새롭게 정립하였는데도 말이다. 결국, 다행스럽게도 리만의 기하학은 물리학에 응용될 수 있었다. 그로스만의 도움을 받은 아인슈타인은 마침내 1915년 중력이 있는 공간 속에서 일반 상대성이론을 완성하여 세상을 다시 놀라게 한 것이다.

아인슈타인의 상대성이론은 우리의 일상과 동떨어진 얘기가 아니다. 인류는 모르는 사이에 매일 상대성이론의 도움을 받고 있다. 지구궤도를 도는 인공위성에 있는 시계에 의해 우리의 GPS는 작동되고 있는데 그 시계는 특수 상대성이론에 따르면 지구 위의 시계보다 천천히 가고 일반

상대성이론에 따르면 빨리 간다고 한다. 그 오차는 수정하지 않으면 단 2분 만에 허용치를 초과하여 쓸모가 없게 된다. 여기서 일반 상대성이론에 의한 오차는 특수 상대성이론에 의한 오차보다 6배가 된다고 알려졌다.

2. 디락–슈바르츠

양자역학 연구의 업적으로 1933년 슈뢰딩거(Erwin Schrödinger)와 함께 노벨 물리학상을 받은 디락(Paul Adrien Maurice Dirac)은 1930년 물리학사에서 기념비가 되는 '양자역학의 원리'라는 책을 내었다. 양자역학의 고전이어서 현재에도 교재로 쓰이는 이 책에서 디락은 간단하며 직관적이지만 논란이 많은 델타함수를 소개하였다. 디락 델타함수는 원점에서 무한대이고 그 외의 점에서 0이며, 적분값이 1인 함수이다. 이 함수는 야구공이 타자의 배트에 부딪힐 때나, 두 당구공이 서로 부딪힐 때의 충격함수, 또는 전자 같은 입자의 점전하와 점질량을 표시할 때 쓰인다.

이러한 델타함수를 수학자들은 받아들일 수 없었다. 왜냐하면, 엄밀한 의미의 함수는 무한대의 값을 가질 수 없으며, 한 점을 뺀 모든 점에서 0인 함수는 적분값이 0이기 때문이다. 그러나 억지로 말하자면 델타함수는 함수들의 극한으로 볼 수 있다. 즉 못처럼 뾰족하며 높이가 갈수록 커지는 함수들의 극한을 델타함수라고 정의할 수도 있다. 단 이 함수들은 전 구간에서 적분값이 1이어야 한다는 조건이 있다.

야구공을 타자가 배트로 칠 때 매 순간 어느 정도 큰 힘이 작용하는가를 알려고 하기보다, 충격이 전달되는 전체시간 동안 전해지는 총 충격량만 알면 야구공의 속도를 예측할 수 있다는 것이 델타함수의 요점이다. 일반적으로 디락은 델타함수 $\delta(x)$가 임의의 연속함수 $f(x)$와 양수 A에 대해서

$$\int_{-A}^{A} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

를 만족한다고 정의하였다. 즉 $\delta(x)$가 $f(x)$에 끼치는 영향력이 $f(0)$라는 것이다.

이렇게 함수 같지 않고 괴팍한 델타함수를 당시의 수학자들은 조소하였다. 그러나 크게 비웃을 수만은 없었던 것은 디락을 비롯한 물리학자들이 델타함수를 쓰며 항상 옳은 답을 얻어냈기 때문이다. 그래서 디락의 물리학적 직관력의 산물인 델타함수는 수학자들에게 큰 골칫거리였다. 그러다가 1940년대 후반 프랑스의 수학자 슈바르츠(Laurent Schwartz)가 초함수(distribution)를 논리적으로 엄밀하게 도입하며 델타함수가 초함수의 일종이라고 보였을 때 수학자들은 비로소 안도할 수 있었다. 슈바르츠는 초함수에 관한 업적으로 수학의 노벨상이라 불리는 필즈메달을 1950년에 수상하였다.

슈바르츠의 성공 요인은 델타함수를 기존의 함수처럼 보지 않고, 다른 함수에 끼치는 델타함수의 영향력을 봄으로써 간접적인 접근을 시도한 데 있다. 물리학적 통찰력에서 출발하여 수학적 엄밀성으로 귀결 짓게 된 과학사의 이 에피소드는 물리학과 수학의 바깥에서 들여다보면 더 잘 이해할 수 있다. 여기서 우리는 물리학자의 델타함수를 수학자가 받아들이는 과정을 철학의 인식

론적 관점에서 해석함으로써 그 본질을 이해하고자 한다. 한 수학자의 아름다운 이론을 철학적으로 다시 음미해보고 싶은 것이다. 우선 인식론의 몇 가지 관점을 알아보자.

로크(John Locke)는 영국 계몽사상의 기초를 닦은 인물이다. 그는 이성적 인식을 중시하는 합리주의적 지반을 떠나지 않고, 여기에서 경험적 인식이 과연 어느 정도까지 진리를 인식할 수 있느냐는 문제를 탐구하였다. 진정한 의미의 인식론은 로크로부터 시작되었다고 말할 수 있다. 그에 의하면 인간이 가지고 있는 모든 관념(idea)은 결코 本有적인 것이 아니다. 인간의 마음은 원래 아무런 글자도 씌어있지 않은 白紙(tabula rasa)와 같은 것이어서 이 백지에 글자를 써넣는 것, 즉 관념을 주는 것은 단지 경험뿐이라는 것이다.

로크에 의하면 외계의 대상이 우리의 감각기관에 영향을 미쳐 거기에 생겨난 감각에 의해 우리는 관념을 얻는다. 그러나 감각에 의해 얻어지는 것은 항상 외계의 사물의 성질뿐이고 사물의 실체에는 우리가 미칠 수 없다. 그리고 감각에 의해 주어지는 사물의 성질을 나타내는 관념도 반드시 사물의 정확한 像은 아니다. 물체의 크기, 수, 모양, 운동과 정지, 고체성 등의 관념은 물체로부터 떼어낼 수 없고 인간의 감각기관과 독립해서 존재하는 것이다. 이에 반해 색, 소리, 냄새, 맛, 온도, 부드러움 등의 관념은 우리의 감각기관에 의해 생긴 것이지 물체 자체가 갖는 성질은 아니다. 로크는 전자를 제1 성질, 후자를 제2 성질이라고 불렀다.

하지만 아일랜드의 철학자 버클리(George Berkeley)는 로크가 말하는 객관적인 제1 성질은 있을 수 없다며, 물체의 제1 성질과 제2 성질의 구별을 완전히 부정하였다. 왜냐하면, 제1 성질도 감각에 의존해서 인식할 수밖에 없고, 감각 자체가 주관적이기 때문에 감각을 통해 얻은 인식은 모두 주관적일 수밖에 없다는 것이다. 이리하여 버클리에 의하면 우리가 보통 물체라고 부르는 사물은 실은 단지 감각에 의해 우리에게 주어진 관념들의 다발에 불과하다. 우리가 물체라고 부르는 것에서 감각에 의해 주어지는 관념들을 하나씩 제거하면 나중에는 아무것도 남지 않는다. 따라서 물체의 존재란 지각된다는 것에 불과하다. 이로부터 버클리는 '존재란 지각됨이다'(esse est percipi, To be is to be perceived)라는 유명한 말을 남겼다.

우리는 흔히 "저기에 사과가 있다"고 할 때 사과라는 어떤 객관적인 실재가 존재하여 그 실재에는 붉은색, 신맛, 무겁고 둥근 모양이라는 고유의 속성을 가지고 있다고 생각한다. 그래서 우리는 붉고 무거우며 둥글고 신맛을 내는 사과가 저기에 있다고 인식하는 것이다. 그러나 자세히 따져보면 저기(외계)에 있다고 생각되는 사과(사물)는 다만 지각된 어떤 것으로서의 사물이며, 이 사물은 '붉다', '시다', '무겁다', '둥글다'와 같은 관념 다발로 우리의 마음속에 존재한다는 것이 버클리의 논리이다.

흄(David Hume)은 영국 경험론의 철학을 극단까지 몰고 가며 자연과학의 필연성과 객관성도 부정하여서 그 한계를 드러냈다. 경험적 사실 이상의 추리를 할 때 우리는 인과관계를 토대로 하는데, 이 인과적 지식이 얼마나 확실한지에 대해 흄은 고민하였다. 그에 의하면 태양의 운행에 대한 인간의 지식은 어제도 오늘도 태양이 동쪽에서 떴으니 내일도 동쪽에서 뜰 것이라고 단지 믿는 것에 불과할 뿐이다. 이렇게 형이상학의 가능성은 흄에 의해 완전히 부정되었고, 결국 경험론

은 절대적 지식을 결코 파악할 수 없다는 회의론에 빠졌다.

이와 같은 흄의 책을 읽고 칸트는 형이상학적 독단의 잠에서 깨어났다고 한다. 상반된 방향으로 치달아 각각 독단과 회의에 빠진 독일의 합리론과 영국의 경험론을 비판적으로 수용하여 칸트는 새로운 철학적 입장을 정립하였다. 합리론이건 경험론이건 종래에는 인식의 문제를 고찰할 때 항상 대상을 중심으로 생각해왔다. 인식이란 대상 그 자체를 있는 그대로의 모습으로 파악하는 것으로 생각하였다. 그런데 칸트는 인식의 대상은 주관의 선천적 형식에 의해 구성되는 것이라고 하였다. 우리가 대상이라고 생각하는 것이 사실은 주관이 자신의 형식으로 구성한 것에 불과하다는 것이다. 중심은 이제 대상 쪽에 있는 것이 아니라 주관 쪽에 있다는 것이다. 대상은 오히려 주관 때문에 구성되는 것이다. 이런 사고방식의 전환을 칸트는 천문학에 빗대어 코페르니쿠스적 전회(轉回)라고 불렀다.

이제 우리의 수학문제인 디락 델타함수로 돌아가 보자. 데카르트는 수학적 방법을 유일하게 참된 학문적 방법으로 생각하였고, 모든 인식은 수학적 방법을 통해서 비로소 확실한 지식에 도달할 수 있다고 말하였다. 데카르트에서 비롯된 합리론은 이성에 의해 일체의 진리를 인식할 수 있다며 이성을 절대적으로 신뢰하였다. 그러므로 수학자에게 필요한 것은 합리론적 인식이고, 반면 경험론적 인식은 수학문제를 풀면서 커피 맛을 음미할 때에만 필요하다고 사람들은 생각하였다.

그런데 디락이 들고 나온 델타함수를 본 수학자들은 당혹스러웠다. 전지전능한 이성으로 함수 자체를 인식하려고 시도한 수학자들은 합리론의 한계에 부딪힌 것이다. 우리의 인식이 이성만으로는 절대 성립하지 않는다는 흄과 칸트의 교훈을 뼈저리게 실감하였다. 칸트에 의하면 우리는 物自體(Ding an sich)의 세계에는 다다를 수 없고, 우리의 감성에 의해 구성되는 현상으로서의 대상만 인식할 수 있다.

이러한 난관을 성공적으로 극복한 수학자가 슈바르츠였다. 여기서 그의 초함수론을 철학적으로 해석하기 위해 칸트를 따라 코페르니쿠스적 전회를 해보자. 즉 델타함수라는 대상을 우리의 주관으로 구성하여 보자는 것이다. 그러면 함수를 인식하기 위한 수학자 주관의 선천적 형식은 무엇인가? 이 선천적 형식 는 다음과 같이 정해진다:

큰 x값에 대해 $\varphi(x) = 0$이며 미분가능한 함수 $\varphi(x)$들의 집합이 이다.

$\mathcal{F}$는 수학자의 감각기관이 되는 셈이다. 이 감각기관으로 함수들을 어떻게 지각할 것인가? 예를 들어서 함수 $f(x)$가 주어졌을 때 수학자가 $f(x)$를 $\mathcal{F}$속의 $\varphi(x)$로 느끼는 관념은 실수 값 $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx$으로 정의된다. 이렇게 지각된 모든 관념이 모여 생긴 관념 다발이 기존의 함수 $f(x)$를 초함수로서 새롭게 정의하는 것이다. 일반적으로 하나의 초함수는 $\mathcal{F}$속의 모든 $\varphi(x)$에 대해 관념을 만들고, 이 관념들이 모여서 하나의 관념 다발을 만든다. 슈바르츠는 이 관념 다발로 원래의 초함수를 정의하였다. 이러한 초함수의 정의는 '존재란 지각됨이다'는 버클리의 말을 연상시킨다.

디락 델타함수를 초함수로 정의하자면 다음과 같다:

$\mathcal{F}$속의 $\varphi(x)$로 실수값 $\varphi(0)$을 느껴서 생긴 관념 다발이 바로 델타함수이다.

이처럼 경험론적으로 정의된 초함수의 개념은 수학의 해석학 분야의 발전에 큰 공헌을 하였다. 물리학의 매우 자연스럽고 직관적인 개념이 수학의 이론을 공고히 하는 데 이바지한 것이다. 초함수의 정의를 이용하면 놀랍게도 초함수의 미분이 가능해진다. $\mathcal{F}$속의 $\varphi(x)$로 $K(\varphi)$라는 실숫값을 느껴서 생긴 관념 다발이 초함수 K를 정의한다고 하자. 그러면 K의 미분초함수는 $\mathcal{F}$속의 $\varphi(x)$로 $K(-\varphi')$이라는 실숫값을 느끼는 것이다.

영화 '스타트렉'에 등장하는 순간이동이란 것도 초함수로 볼 수 있는데, 순간이동을 미분하면 델타함수가 된다. 반면에 델타함수를 미분한 것만큼 충격을 가하면 야구공은 순간이동을 하게 된다.

돌이켜 보건대 디락은 충격적인 힘을 무리하게 매 순간 측정하려 들지 않고, 그저 전체시간의 충격량을 알고자 했다. 충격함수 자체를 인식하려 들지 않고 그 함수의 간접적인 영향력에 관심을 둔 것이다. 디락의 이러한 간접적인 시각의 효용성을 인정한 슈바르츠는 논리적인 비약을 하여 테스트 함수 $\varphi(x)$들의 집합 $\mathcal{F}$를 통해 델타함수를 비롯한 초함수를 간접적으로 인식하는 수학이론을 정립한 것이다. 수학 논리의 바깥에서 유유자적하던 디락을 슈바르츠는 수학 논리 안으로 끌어들인 것이다. 마치 칸트가 코페르니쿠스적 전회를 통해 경험론을 포용한 것처럼.

3. 허수

2차 방정식의 해법은 이미 기원전 2000년에 바빌로니아 사람들이 알고 있었다. 그러나 거의 4000년이 지난 1545년에야 3, 4차 방정식의 해법이 카르다노에 의해서 발표되었다. 그 당시만 해도 $\sqrt{2}$ 같은 무리수는 껄끄러운 수이긴 하지만 사람들이 받아들였다. 왜냐하면, 무리수는 유리수로 쉽게 근사값을 구할 수 있었기 때문이다. 그러나 無인 수 0보다 더 작은 음수는 존재의미를 부여할 수 없어서 무리수보다 더 까다로운 수로 여겨졌다. 양수와는 방향이 반대인 수로서 그나마 음수는 존재의미가 있었다. 그렇지만 카르다노(Girolamo Cardano)마저도 무리수와 음수를 허구의 수라고 불렀다고 한다.

사정이 그러하니 그 당시 사람들이 $\sqrt{-1}$ 과 같은 허수는 존재하지 않는다고 생각하는 것은 이해할 만하다. 〈이런 허수는 서로 만나지 않는 원과 직선의 교점을 표현하는데 나타나므로.〉 그러나 3차 방정식을 다룰 때는 문제가 달랐다. 카르다노가 발표한 3차 방정식의 근의 공식에 의하면

$x^3 = 15x + 4$ 의 근은 $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 이다.

여기서 근에 $\sqrt{-121}$ 이라는 허수의 항이 포함되지만, 실제 근은 모두 실수인 4, $-2 \pm \sqrt{5}$ 다. 이렇게 근은 실수이지만 허수를 포함한 식으로밖에 표현할 수 없다는 사실이 매우 당혹스러웠다. 이런 상황은 피할 수 없다는 정리가 1896년에 증명되긴 하였다. 별수 없이 카르다노는 허수를 궤변이라고 치부하였다. 그러면서도 그는 허수를 가지고 유희를 하였다. 합이 10이며 곱이 40인 두 수는 $5 \pm \sqrt{-15}$ 라고 보이면서 그는 이를 미묘하고 쓸모없는 유희라고 불렀다.

한편 1572년 봄벨리 Rafael Bombelli는 카르다노 근의 공식에 있는 허수 $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$을 $c+d\sqrt{-1}$의 꼴로 간단히 바꾸려는 시도를 하다가 중요한 결론에 도달했다. 오늘날과 같은 복소

수의 합과 곱의 계산법을 정한 것이다. 그 자신 미처 그 중요성을 자각하진 못했지만, $\sqrt{-1}$을 imaginary number라고 부른 것은 1637년 데카르트였다. 그만큼 상상 속에서만 존재하는 수라고 본 것이다. 그런데 $\sqrt{-1}^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ 이라는 정의와 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 라는 식의 상호 모순성은 심지어 오일러도 당혹스럽게 하였다고 한다. 그는 $\sqrt{-2}\sqrt{-3} = \sqrt{6}$ 이라고 증명까지 한 것이다. 결국, 이런 혼란을 피하기위해 수학자들은 $\sqrt{-1}$ 대신 i 라는 기호를 쓰기 시작하였다.

이렇게 하여 18세기 들어서 복소수는 많이 사용되었다. 1707년 드므와브르(Abraham de Moivre)는 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ 라는 공식을 발견하였다. 뉴턴은 수학문제를 물으러 그에게 찾아오는 사람들을 드므와브르에게 보냈다고 한다. 그가 자기보다 수학을 잘 안다고 말하면서. 한데 비에테(Viète)도 그보다 100년 전에 비슷한 것을 발견하였다. 즉 $\cos n\theta$ 와 $\sin n\theta$ 를 $\cos\theta$ 와 $\sin\theta$ 의 n 차식으로 표현하는 관계식을 $(\cos\theta + \sin\theta)^n$ 을 풀어헤친 식에서 한 항씩 건너뛰며 부호를 −로 바꾼 것이라고 보였다. 이것은 바로 $\sin\theta$에 계수 i를 덧붙인 것으로 설명할 수 있는데, 그 당시 허수에 대한 거부감으로부터 생긴 한계라고 볼 수 있다.

한 걸음 더 나아가 오일러는 1748년에 공식 $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ 을 발견하였다. 그런데 드므와브르의 공식에는 매우 중요한 의미가 담겨 있다. 그것은 바로 곱을 합으로 바꾸는 것을 가능케 해주는 공식이라는 것이다. 복잡한 곱하기 계산을 쉬운 더하기 계산으로 바꾸는 방법을 찾는 것은 중세 때부터 많은 사람들의 꿈이었다. 한 방법은 지수법칙을 이용하는 것인데 예를 들어 2의 멱수들이 모여있을 때 이 수들의 곱을 구하자면 지수들을 더하면 되는 것이다. 문제는 2의 멱수들이 서로 너무 떨어져 있다는 점이었다. 이런 방법을 스코틀랜드의 한 영주인 네이피어(John Napier)가 친구에게 가르쳐주자 그는 흥미로운 얘기를 들려주었다. 그 친구는 御醫로서 제임스 왕을 따라 항해하다 풍랑을 만나 한 섬에서 피난했는데 거기서 천문학자 티코 브라헤(Tycho Brahe)를 만나게 됐다. 이 유명한 천문학자는 1008년 이집트 사람들로부터 전해 내려온 쉬운 계산법에 대한 이야기를 들려주었다. 그것은 $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$ 라는 삼각함수 식을 이용하여 코사인 표로부터 곱하기를 더하기로 바꾸는 방법(prosthaphaeresis)이었다. 이 방법을 전해 들은 네이피어는 지수법칙으로 곱하기를 보다 간단히 더하기로 바꾸는 계산방법을 완성하기로 결심하였다. 그 아이디어는 서로 떨어져 있는 2의 멱수들을 2의 유리수 승으로 이어주는(interpolation) 것이었다. 이 작업을 하기 위해 네이피어는 0.9999999의 100승이 0.99999이라고 보이는 계산부터 시작하였다. 이로부터 20년간 계산에 몰두한 끝에 네이피어는 1614년 로그표를 발표하였다. 막대한 계산작업에 고생하던 당대의 과학자들은 네이피어의 로그표를 크게 환영하였다.

그러면 티코 브라헤와 네이피어와 드므와브르는 수학적으로 어떤 관련이 있는 것일까? 이 문제에 대한 열쇠는 1799년 베셀(Wessel)과 1806년 아르강(Argand)과 1831년 가우스가 독립적으로 정의한 복소평면에서 찾아볼 수 있다. 가우스는 사실 1797년에 복소평면을 이용하여 모든 대수방정식은 근을 갖는다는 대수학의 기본정리를 증명하였으나 허수 i의 형이상학적 문제에 자신이 없어 발표를 미룬 것이다. 그러나 하디(G.H.Hardy)는 가우스야말로 복소평면을 처음으로 자

신 있고 엄밀하게 다룬 수학자라고 평했다. 복소평면에서 두 복소수 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ 과 $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ 의 곱은 $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ 이다. 즉 두 복소수를 곱할 때 절대값끼리는 곱하고 편각끼리는 더해야 하는 것이다. 그러므로 복소평면을 통해서 곱하기가 더하기로 연결되는 것이다. 네이피어가 자극 받은 티코 브라헤의 prosthaphaeresis 방법의 코사인 식은 두 복소수의 곱과 더하기의 관계식으로부터 나오는 코사인과 사인의 합의 공식에서 유도되는 식인 것이다. 한편 드므와브르와 오일러가 그들 공식의 기하학적 의미를 깨닫지 못했다는 것은 그만큼 복소평면의 개념이 혁신적임을 뜻한다고 해석할 수 있다.

복소수를 기하학적으로 이해하려는 시도는 1673년 윌리스(John Wallis)가 처음 하였다. 그는 2차 방정식 $x^2 + 2bx + c^2 = 0\ (b, c \ge 0)$의 두 근 $x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$ 이 $b \ge c$ 일 때 그림A 에서 실수축 위의 두 점 P_1과 P_2로 나타낼 수 있다고 보였다. 그러나 $b < c$ 일 때는 P_1, P_2가 실수축에 남아 있을 수 없게 된다. 그래서 Wallis는 P_1과 P_2가 그림B 에서처럼 실수축을 벗어난 두 점이어야 한다고 보았다. 그는 두 허수 $\pm\sqrt{b^2 - c^2}$ 이 오른쪽, 왼쪽에 있어야 한다는 선입견에서 못 벗어난 것이다. 그러나 가우스의 복소평면에서는 그림C 에서처럼 P_1과 P_2는 위 아래의 두 점이 된다. 허수축은 실수축과는 방향이 다르며 수직이어야 한다는 것이 복소평면의 핵심이다.

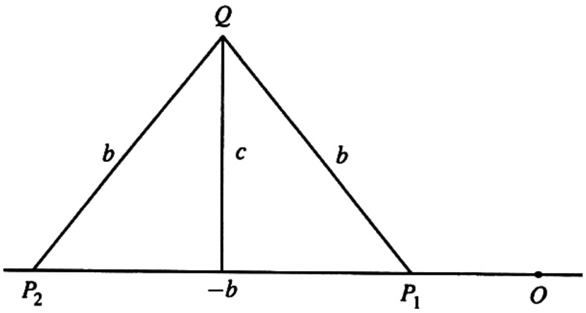

그림 A

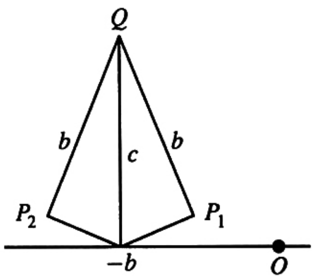

그림 B

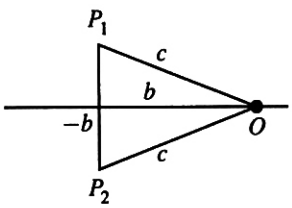

그림 C

복소수의 곱하기는 복소평면에서 확대와 회전을 나타낸다. 모든 방향으로 같이 확대되고 회전되어야(conformal) 하는 것이다. 이는 복소함수가 복소평면에서 작은 정사각형을 정사각형으로 보낸다는 매우 자연스럽고 환상적인 성질을 보여준다. 이로부터 복소함수의 미분가능 조건인 코시-리만 방정식이 생겨났다. 그래서 복소함수는 한 번 미분 가능하면 무한 번 미분 가능하고, 그 적분값은 적분구간이 중간에 움직여도 변하지 않는다는 엄청난 성질을 갖고 있는 것이다. 이리하여 복소수는 오묘한 물리현상을 표현하는 많은 방정식에서 그 위용을 드러내는 것이다.

허수는 수학자가 발견한 것 중 가장 위대한 것이라고 한다. 그러나 수학자가 허수를 능동적으로 찾아낸 것은 아니다. 이와 정반대로 허수가 수학자를 찾아왔으나 수학자는 허수를 피했고, 골치 아파했고, 다루기를 싫어했다. 그러나 자연 속에서 매우 자연스럽고 조화롭게 살고 있던 허수는 어느 날 실수와 짝을 이루면서 화려하게 등장하더니 그때부터 인간이 자연 현상을 이해하는 데에 크나큰 도움을 주고 있다.

최재경

최재경 교수는 1977년 서울대학교 수학과를 졸업하고 미국 캘리포니아주립대학교에서 수학 박사학위를 받았다. 현재 수학의 미분기하학 분야에서 극소곡면, 상수평균곡률곡면, 기하측도론 등을 집중 연구하고 있다.