Quantum Teichmüller Theory에 관하여

글_김현규·고등과학원 수학부 연구원

기하학에 관한 연구 중에는 곡면 위에 정의할 수 있는 '거리'들에 대한 것이 많다. 이 '거리'를 수학적으로 엄밀하게 표현한 것을 리만 계량(Riemannian metric) 혹은 계량(metric)이라고 한다. 곡면 위에 계량이 주어지면 그에 따라 곡면이 얼마나 '휘어져 있는지'를 단면곡률(sectional curvature)을 계산하여 측정할 수 있다. 단면곡률이 상수인 경우가 가장 쉽고 표준적이며, 단면곡률이 상수로 −1인 계량을 쌍곡계량(hyperbolic metric)이라 한다. 쌍곡기하에서 중요한 연구대상이, 주어진 실수 2차원 곡면 위에 정의할 수 있는 모든 쌍곡계량들의 집합인 타이히뮐러 공간(Teichmüller space)이다. 쌍곡계량들 중에는 '유의미한 구분'이 불가능한 것들이 있으며('isotopic'), 타이히뮐러 공간에서는 이러한 쌍곡계량들을 같은 것으로 친다.

타이히뮐러 공간은 단순히 집합이 아니라 그 자체가 계량을 가지는 복소다양체이며, 이러한 타이히뮐러 공간의 기본적인 구조와 성질에 관한 연구는 20세기의 전반에 이미 많이 이루어졌다. 한편 타이히뮐러 공간 위에 정의된 어떠한 계량들은 '푸아송 구조(Poisson structure)'라는 언어로써 쓰일 수도 있다. 일반적으로 다양체가 푸아송 구조를 가진 경우에 그것을 양자화(quantize)하는 문제를 생각할 수 있고, 이는 수학과 물리학에서 각기 다른 의미에서 중요하고 자연스러운 문제이다. 양자화를 설명하는 한 가지 방법은, 다양체 위에 정의된 함수들을 어떤 힐버트 공간(Hilbert space) 위의 작용소들로 '변형(deform)'하여, 이러한 변형이 원래의 푸아송 구조에 대한 정보를 지니게 하는 것이다.

그런데 놀랍게도, 수학자들이 타이히뮐러 공간을 양자화하는 데에는 아주 오랜 시간이 걸렸다. 이러한 어려움은 타이히뮐러 공간이 가진 또 다른 흥미로운 구조로부터 온다. 여기에서 등장하는 또 하나의 주인공이 기하학적 군론(geometric group theory) 등에서 중요한 mapping class group이다. 이를 처음의 2차원 곡면의 미분동형사상들을 모아놓은 군으로 정의하고, 편의상 MCG라고 쓰자. 타이히뮐러 공간에서의 경우와 마찬가지로, 유의미한 구분이 불가능한('isotopic') 미분동형사상들은 MCG의 원소로서 같은 것으로 본다. 곡면의 각 미분동형사상은 당김(pullback)으로써 곡면 위의 계량들에 작용하며, 이로써 MCG가 타이히뮐러 공간 위에 작용한다.

타이히뮐러 공간 위의 이 MCG−작용의 흥미로운 점은, 그 작용이 타이히뮐러 공간의 기본적(canonical) 푸아송 구조 중 하나인 Weil−Petersson 푸아송 구조를 보존한다는 것이다. 이처럼 푸아송 구조를 보존하는 군 작용이 있으면, 그 푸아송 구조를 양자화할 때에 그러한 군 작용까지도

함께 '양자화'할 수 있기를 기대하는 것이 자연스럽다. 이러한 MCG-작용의 양자화를 위해서는 이전에 없던 새로운 도구가 필요했기 때문에 수학자들이 타이히뮐러 공간의 양자화에 어려움을 겪었다. 한편 군 작용의 양자화 역시 Hilbert space 위의 작용소로 나타내어질 수 있고, 따라서 양자 타이히뮐러 이론(quantum Teichmüller theory)의 결과로 MCG의 각 원소마다 Hilbert space 위의 작용소를 얻는다. 이러한 (MCG 원소) ↦ (작용소) 대응이 MCG의 '사영적 표현(projective representation)'이며, 이 사영적 표현이 양자 타이히뮐러 이론의 주요 결과물 및 동기 중 하나이다.

타이히뮐러 공간의 양자화가 가능해지려면, 우선 타이히뮐러 공간이 '좋은' 좌표계를 가져야 한다. 즉, 타이히뮐러 공간의 푸아송 구조와 그 위의 MCG-작용을 그 좌표계에 관하여 썼을 때 '양자화하기 쉬워야' 한다. 이러한 '좋은' 좌표계는 1980년대 부근부터 Penner와 Thurston 등에 의해 연구 및 발전되었다. 또한 양자 타이히뮐러 이론의 최종 결과물인 MCG-작용의 양자화된 공식을 쓰는 데에 필요한 quantum dilogarithm이라는 함수가 1990년대 중반에 Faddeev와 Kashaev에 의해 정의되었다. 그리하여 타이히뮐러 공간의 양자화가 1990년대 후반에야 비로소 이루어진 것이다. 타이히뮐러 공간의 양자화는 Kashaev([1])와 Chekhov-Fock([2], [3])에 의해 독립적으로 이루어졌는데, 각기 다른 좌표계를 사용했다.

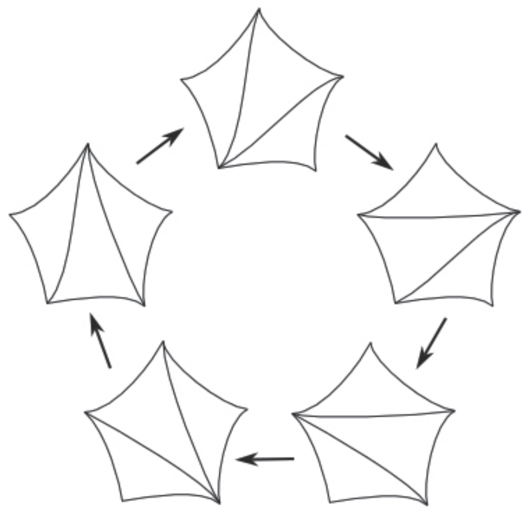

그림. 오각형 관계식

그들이 사용한 좌표계를 정의하기 위해서는, 우선 우리의 2차원 곡면이 0차원의 구멍인 'puncture'들을 필히 가져야 하고, 그 puncture들을 꼭짓점으로 가지는 곡면의 삼각형분할을 하나 정해야 한다. 이러한 삼각형분할의 선택을 달리해도 양자화의 결과가 불변이되게 하는 것이 중요한 포인트이다. 이는 또 위에서 보았던 MCG의 작용과도 관련이 있는데, MCG의 원소가 자연스럽게 삼각형분할의 변화를 유도하기 때문이다. 각 삼각형분할의 변화는 좌표의 변화를 가져오며, 이 좌표변환을 잘 '양자화'한다면 삼각형분할의 선택에 불변인 타이히뮐러 공간의 양자화를 얻을 수 있고, 이것은 동시에 우리가 최종적으로 원하는 MCG의 사영적 표현까지 주게 된다.

삼각형분할의 변환들 사이에는 일정한 대수적 관계들이 성립하는데, 그 중 가장 중요한 관계는 그림과 같은 '오각형 관계식(pentagon relation)'이다. 즉 그림에서와 같이 다섯 번 변환을 시행하면 원래 그림과 똑같아지므로, 이들이 유도하는 다섯 개의 좌표변환의 합성도 항등변환이 되어야 한다. 이러한 관계는 양자화된 후에도 거의 성립해야 하며, 따라서 삼각형분할 변화에 대한 좌표변환의 양자화 공식은 '양자 오각형 관계식(quantum pentagon relation)'이라는 어떠한 5항 방정

식을 만족해야 한다. 수학자들은 quantum dilogarithm이라는 함수를 이용하여 이 방정식의 해를 구하였고, 이를 이용해서 타이히뮐러 공간의 양자화를 얻었다.

타이히뮐러 공간의 양자화가 정립된 이후에는 주로 그 결과물인 MCG의 사영적 표현에 관한 연구들이 이뤄져 왔다. 예를 들어 필자는 Igor Frenkel 교수와 함께, 일반적인 텐서 카테고리(tensor category)의 '결합성(associativity)'에 해당되는 사상(morphism) $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$이 일관성을 위해 만족해야 하는 관계식이 오각형 관계식과 같음에 착안하여, 양자 타이히뮐러 이론의 최종 공식과 똑같은 결과를 주는 텐서 카테고리를 양자군의 표현론을 이용하여 구성하였다([4]). 또한 필자는 [5]에서 '열린 단위 원판(open unit disk)'의 타이히뮐러 공간의 양자화를 통해 톰슨군(Thompson group)이라 불리는 군의 사영적 표현을 얻었는데, 이 표현이 '무한꼬임군(infinite braid group)' B_∞과도 관계가 있음을 보였다. 이 외에도 양자 타이히뮐러 이론은 3차원 다양체의 불변량, 양자 클러스터대수(quantum cluster algebra), 그리고 물리학의 양자중력이론 등과도 관련이 있어 연구가치가 크다.

[1] R. M. Kashaev, *Quantization of Teichmüller spaces and the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. 43 (1998), 105–115.

[2] V. V. Fock, *Dual Teichmüller spaces*, preprint, arXiv:dg-ga/9702018v3.

[3] L. Chekhov and V. V. Fock, *A quantum Teichmüller space*, Theor. Math. Phys. 120 (1999), 1245–1259.

[4] I. B. Frenkel and H. Kim, *Quantum Teichmüller space from the quantum plane*, Duke Math. J. 161 no. 2 (2012), 305–366.

[5] H. Kim, *The dilogarithmic central extension of the Ptolemy-Thompson group via the Kashaev quantization*, preprint, arXiv:1211.4300