쉬프들의 모듈라이 공간에 대하여

글_정기룡·고등과학원 수학부 연구원

X를 특정한 사영공간에 매장되어 있는 다영체라 하자. 이 연구에서 기하적 구조를 알아내고자 하는 것은 고정된 위상적 불변량(다른 말로, 고정된 Hilbert Polynomial P(m))을 갖는 위의 쉬프들의 모듈라이 공간이다. 1990년대 중반, C. Simpson은 Higgs field의 일반화로써 이 공간의 존재성과 기본적인 성질을 밝혀 내었다([Sim94]).

모듈라이 공간 $M(X,P(m))$는 자연스러운 사영 다양체의 구조를 갖는다. 하지만, 건설의 추상성으로 인해, 일반적인$(X,P(m))$에 대해 이 공간에 대한 이해가 현저히 낮은 상태이다. 이번 글에서는 공간 $M(X,P(m))$에 대한 다양한 접근 방법 중에서 흥미있는 두 가지 방법을 소개하고자 한다.

1) Log Minimal Model Program(LMMP) for $M(X,P(m))$

대수기하학의 큰 주제 중의 하나는 algebraic varieties의 classification 문제이다. 즉, 두 개의 varieties가 isomorphic한지 여부를 밝히는 것은 다른 수학 분야와 마찬가지로 가장 원론적인 질문이다. 이와 관련하여 대수적 다양체에서만 볼 수 있는 자연스러운 분류법 중 하나는 birational equivalent라는 개념이 있다. 두 개의 대수적 다양체가 birational equivalent라 함은 두 공간 모두 동현인 Zariski's dense open subset을 포함하는 것을 뜻한다. 차원 2 이하인 경우 birational equivalent로서 대수적 다양체의 분류는 Enrique, Kodaira에 의해 완성되었다.

하지만, 차원이 3이상인 경우 현재까지는 완전한 답을 찾는 것은 요원한 일이고 활발히 연구되고 있다. 이와 관련하여 S. Mori가 대수적 다양체를 birational equivalent로 분류하는 하나의 program을 제안 하였다. 이 방법은 주어진 대수적 다양체의 가능한 모든 birational equivalent 한 공간들을 하나의 틀에서 고민할 수 있다는 점에서 대수적 다양체 분류에서 중심축을 이룬다. LMMP은 다음 두 가지 일을 하는 것으로 압축된다.

ⓐ 주어진 대수적 다양체의 Effective & Nef cone을 찾고 그것의 stable base locus decomposition을 하라.

ⓑ ⓐ의 divisor들에 대해 그것의 Log canonical model $\mathrm{Proj}(\oplus_m H^0(mD))$ 의 존재성을 증명하고 본래의 공간과의 birational relation을 찾아라.

일반적인 대수 다양체에 대해 위 두 가지 일을 하는 것은 쉽지 않다. 그래서 연구자들은 주어

진 대수 다양체가 기하적 정보를 담고 있는 모듈라이 공간일 때 이 일을 해오고 있고, Harris, Hasset, Morrison 등 여러 수학자들이 대수적 곡선들의 변수에 대해 많은 성공적인 결과를 내왔다. 이 경우 LMMP이 잘 진행될 수 있던 근본 이유는 기하적 의미가 있는 divisor들과 curve class의 건설 그리고 교차 수 계산이 이루어졌기 때문이다. 이 연구에서는 상대적으로 기하적 의미가 덜 알려져 있는 모듈라이 공간 $M(X,P(m))$에 대해 연구를 진행하고자 한다.

역사적으로 이런 쉬프들의 공간에 대해 Mori program을 적용한 사례들이 있다([Tha94, ABCH12]). 첫 번째는 1990년대 초반, Thaddeus에 의해 이루어진 작업이다([Tha94]). 이 연구를 통해 그는 물리적 동기를 갖는 Verlinde 예측을 증명하는데 성공한다. 두 번째 예는 Coskun과 그의 공저자들에 의해 이루어진 업적인데, Hilbert scheme of points에 대해 effective cone decomposition을 마쳤다([ABCH12]). 뿐만 아니라, 이 논문은 현재까지도 대수 기하학자들에게 의문스러운 derived category 안의 object들의 변수 공간을 scheme 범주에서 명확히 구현한 첫 번째 예라는 점에서 그 의미가 크다. 이런 측면에서 볼 때, 쉬프들의 공간에 대해 LMMP를 실행시켜 보는 것은 일반화의 일환으로 생각할 수 있다.

2) Enumerative Geometry: BPS numbers

주어진 공간 안의 커브의 갯수를 세는 것을 연구하는 Enumerative geometry는 대수기하학의 큰 축을 이룬다. 1990년대 중반 이후 Enumerative geometry는 물리학적으로 관심이 큰 Calabi-Yau 3-fold 안에서의 커브의 갯수 세는 문제로 집중하게 되었는데, 크게 방법론은 다음과 같이 압축된다.

ⓐ 주어진 공간의 커브들을 매개화하는 긴밀한 공간을 건설하라.

ⓑ 그 긴밀한 공간에 적절한 intersection theory를 주어 deformation invariants를 제시하라.

이러한 방법에 잘 부합하는 서로 다른 네 가지의 긴밀화 방법이 있다. 이들은 주어진 공간 X안의 커브를 보는 관점에 따라 다른 긴밀화된 공간을 제공한다. 이를 도표로 정리해보면 다음과 같다.

긴밀화 관점	Moduli space = $Mod_g(X, \beta)$	Invariants= $\deg([Mod_g(X, \beta)]^{virt})$
Embedding map	Kontsevich space (GW-space)	$N_\beta^g(X)$
Structure sheaf	Donldson-Thomas space (DT-space)	$n_\beta^g(X)$ 1)
Pair of sheaf and section	Pandharipande-Thomas space (PT-space)	$PT_\beta^g(X)$
Ideal sheaf	Hilbert scheme	$I_\beta^g(X)$

표에서 나온 불변량들을 연관 시키는 잘 알려진 conjecture는 GW−PT−DT correspondence이다([MNOP06, PT09]). 즉,

임의의 CY 3−fold에서 GW, PT, DT−invariants은 변수 변환 후 동등하다.

이 가설은 Pandharipande, Thomas 등 많은 String theory을 연구하는 수학자들이 특별한 CY 3−fold의 클래스에 대해 성립함을 수학적인 논증을 거쳐 증명하였다. 하지만, 일반적인 증명법에 대해서는 여전히 활발히 연구되고 있는 주제이다. 이번 연구에서는 GW−DT correspondence에 대해 탐구하고자 한다. 이 경우 GW−DT correspondence는 물리적 공식인 Gopakumar−Vafa conjecture로 설명되는데, 종수가 0일 때는 다음 공식으로 압축된다.

$$N_{\beta}^{0}(X)=\sum_{m|\beta}\frac{n_{\frac{\beta}{m}}(X)}{m^{3}}$$

실제로 이 conjectural formula는 물리학적인 근거를 바탕으로 하였고 $n_{\beta}(X)$는 BPS state(혹은 number)이다. 우리의 연구에서는 구체적인 모델로서 P^2의 canonical line bundle $(K_{P^2})=O_{P^2}(-3))$의 공간에서 커브의 개수를 세어보고자 한다. 물론, 이 경우 위의 correspondence는 equivariant 버전으로 바꾸어 설명되어야 하고 그 경우에 localization 등을 고려하면 여전히 비슷한 형태의 correspondence를 예상할 수 있다. 한편, 여러 대수적 조건 때문에, 이 경우 BPS number는 부호가 붙은 오일러 넘버로 정의하는 것이 자연스럽다는 것이 알려져 있다([Kat08]).

$$n_{d}=(-1)^{\dim M(d,1)}e(M(d,1))$$

실제로, Gopakumar−Vafa formula에 따라 이 넘버들을 예상해 보면 다음 표와 같다.

d	1	2	3	4	5	6	7	…
$n_d(X)$	3	−6	27	−192	1695	−167064	188454	…

$d\leq 3$인 경우, 간단한 계산을 통해 conjecture가 성립한다는 것을 알 수 있다. d=4와 5인 경우, 저자는 (공저자 : 최진원) wall−crossing을 이용하여 이 예상이 옳았음을 증명하였다([CC12]). 증명은 PT공간으로부터 JS−공간(sufficiently twisted pair moduli space, [JS08])으로 가는 일반적인 wall−crossing을 기술하고, JS−공간에서 DT−공간으로 가는 모피즘을 분석함으로써 가능하였다. 후자의 morphism들을 기술하는 과정에서 일반적인 cohomology bound에 대한 conjecture도 해결하였다. 증명의 핵심은 Higgs field의 마듈라이와 DT−공간과의 관계를 기술하는 것이다. 결국, BPS number들을 모두 알아내는 문제는 DT−공간에 대한 기하구조(Cohomology group & ring)에 대한 이해로 귀결되고 이것이 이번 연구의 또 다른 필요성이다.

참고 문헌

▶ [ABCH12] D. Arcara, A. Bertram, I. Coskun and J. Huizenga. The minimal model program for the Hilbert scheme of points on P^2 and Bridgeland stability. Advances in Mathematics, vol. 235 (2013), 580−−626.

▶ [CC13] J. Choi and K. Chung. Cohomology bounds for sheaves of dimension one on P^2. arXiv:1302.3691

▶ [CC12] J. Choi and K. Chung. Moduli Spaces of −stable Pairs and Wall−Crossing on P^2. arXiv:1210.2499

▶ [JS08] D. Joyce and Y. Song. A theory of generalized Donaldson−Thomas invariants. arXiv:0810.5645.

▶ [Kat08] S. Katz. Genus zero Gopakumar−Vafa invariants of contractible curves. J. Differential Geom., 79(2):185−195, 2008.

▶ [MNOP06] D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov, and R. Pandharipande. Gromov−Witten theory and Donaldson−Thomas theory. I. Compos. Math., 142(5):1263−1285, 2006.

▶ [PT09] R. Pandharipande and R. P. Thomas. Curve counting via stable pairs in the derived category. Invent. Math., 178(2):407−447, 2009.

▶ [Sim94] C. Simpson. Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 79 (1994), 47−129.

▶ [Tha94] M. Thaddeus. Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula. Invent. Math. 117 (1994), 317−353.