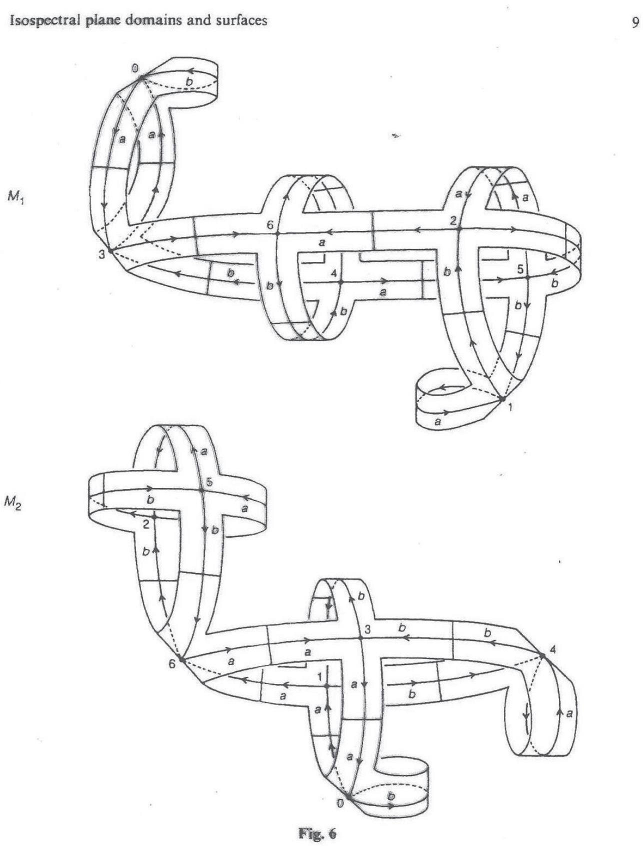
라플라스 작용소의 동일 고유값을 가지는 다양체

글_강현석·고등과학원 수학부 연구원

앞의 글에서 소개된 바와 같이 라플라스 작용소 Δ의 고유값에 대한 카크(Mark Kac)의 질문 중 "Can one hear the shape of a drum?"이 있다. 원래는 평면에서의 볼록영역(convex domain) 또는 매끈한 영역(smooth domain)에 대한 것이나 일반적으로 말하자면 라플라스 고유값으로 다양체의 기하적 성질을 결정할 수 있는가에 대한 질문으로서 결론부터 말하자면 그렇지 않다는 것이 정답이다. 이 질문이 나오자마자 밀너(John Milnor, 참조 문헌 4)의 16차원 원환면(16-dimensional flat torus)을 이용하여 만든 반례가 나온 이후 동일 라플라스 고유값을 갖지만 기하적으로 다른 다영체(isospectral non-isometric manifolds)를 찾는 연구가 계속되어 오고 있다. 특히 1985년에 수나다(T. Sunada, 참고 문헌 5)가 커버링을 이용하여 완화된 공액 부분군(almost conjugate subgroups)에 의해 상구조로 만들어진 다양체(quotient manifolds)들이 동일 고유값을 가지는 것을 보였다. 이후 알려진 대부분의 반례들은 이 방법에 의해 보여졌고 수나다 테크닉 이외의 방법으로도 반례를 보일 수 있는지에 대한 연구도 되어오고 있다. 또한 고든(C. Gordon)과 슈트(D. Schueth) 등은 토러스 액션(torus action)과 리만니안 서브머전(Riemannian submersion)을 이용하여 동일 고유값을 갖는 다양체를 만드는 방법을 발전시켜왔다. 지금까지의 연구와 동향에 대해 잘 쓰여있는 서베이 페이퍼로는 고든과 그 외 저자의 참고문헌 1과 참고문헌 2 등이 있다.



같은 고유값을 가진 서로 다른 곡면의 예 (출처: 참조 문헌 3)

위와는 반대의 방향으로 문제에 접근

하는 일반적인 방향중 하나는 열 불변량(heat invariants)을 보는 것이다. 라플라스 작용소의 열핵(heat kernel) $K(x,y,t)$는 두 개의 공간 변수 x와 y 그리고 하나의 시간변수 t에 대해 적절한 미분가능성을 가지고 x에 대해 약한수렴을 하며 y에 관한 열 방정식을 만족하는 함수이다. 컴팩트한 n차원의 다양체 M에 대한 라플라스 작용소 Δ의 고유값을 λ_i이라 하였을 때 상응하는 고유함수 ϕ_i로 M에서 정의된 L_2-함수 공간의 정규직교기저(orthonormal basis)를 만들 수 있다. 이때 열핵의 공간 변수에 대해 대각합(trace)을 취해 주어 얻은 열 대각합(heat trace)을 다음과 같이 쓸 수 있으며 오른쪽에 나타난 a_k를 열 불변량이라 부른다.

$$\int_M K(x,x,t)\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-\lambda_i t) \sim_{t\to 0} (4\pi t)^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k .$$

이 값은 다양체 불변량으로써 곡률 공변미분값(covariant derivative)의 적분들의 합으로 표현될 수 있기에 20세기 중반까지는 이 값으로 다양체의 기하적 성질을 결정하기를 기대하였으나 저차원의 구면같은 특수한 경우를 제외하고는 위에서 언급한 바와 같이 결정할 수 없는 경우가 많은 것을 보았다. 하지만 아직도 카크의 처음 질문에 대해서는 밝혀진 바가 없고 스펙트랄 기하의 가장 중요한 문제중 하나로 남아있다.

참고 문헌

1. C. Gordon. Survey of isospectral manifolds. Handbook of differential geometry 1 (2000) 747–778.
2. C. Gordon, P. Peter and D. Schueth. Isospectral and isoscattering manifolds: a survey of techniques and examples. In Geometry, spectral theory, groups, and dynamics. Contemp. Math. 387 (2005) 157–179.
3. C. Gordon, D. Webb and S. Wolpert, Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. Invent. Math. 110 (1992), no. 1, 1–22.
4. J. Milnor, Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 51 (1964) 542.
5. T. Sunada, Riemannian coverings and isospectral manifolds. Ann. of Math. (2) 121 (1985), no. 1, 169–186.