기하학적 미분 작용소의 스펙트럼과 불변량

글_박진성·고등과학원 수학부 교수

현대 수학의 특징 중의 하나는 수학의 여러 분야가 서로 영향을 주고받으며, 한 분야의 문제가 다른 분야의 이론의 응용으로 해결되고, 이를 통하여 더욱 일반적인 수학의 구조를 보여준다는 데 있다. 예를 들어 기하학적인 문제를 대수학이나 해석학적인 이론을 이용하여 해결할 수 있으며, 이와 같이 전통적인 수학의 두 분야가 결합하여 탄생한 수학의 예로서 대수기하학(algebraic geometry), 기하학적 해석학(geometrtic analysis), 대역해석학(global analysis) 등을 들 수 있다. 본 글에서는 이러한 수학의 분야 중 대역해석학에 대하여 간단하게 살펴보고자 한다. 특히, 필자의 연구 관심사에 따라 기하학적 미분작용소의 스펙트럼에 대한 연구를 중심으로 이를 소개하고자 한다.

이 글의 앞부분에서는 기하학적 미분작용소가 정의된 다양체는 compact이며 smooth하다고 가정한다. 뒤에서 이러한 조건이 없는 경우에 대하여 간단하게 다루기로 한다.

대역해석학에서의 잘 알려진 문제의 예로서 Mark Kac이 제기한 “Can one hear the shape of drum?”이라는 문제를 생각해 볼 수 있다.(참고문헌 1 참조) 여기서 북(drum)은 다양체로, 북이 만들어 내는 소리(음파)는 주어진 다양체 위에서의 라플라스작용소의 고유치들로 이해될 수 있다. 따라서 이 문제는 “다양체의 라플라스작용소의 고유치가 다양체를 결정하는가?”라는 문제로 바뀌며, 이는 다양체 위에서 정의된 해석학적 문제로 이해될 수 있다. 이 문제에 대한 자세한 소개는 강현석 박사의 글을 참조 바란다.

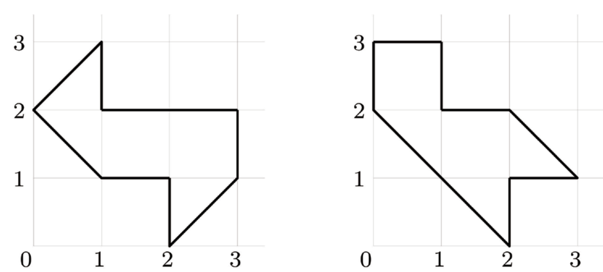

그림1. 위의 질문에 대해 고든(Gordon)–웹(Webb)–울퍼트(Wolpert)가 발견한 반례. 서로 다른 두 평면도형을 경계를 갖는 다양체로 이해할 때, 두 다양체 디리클레 라플라스작용소는 같은 고유치 집합을 갖는다. (위의 두 도형의 면적과 경계의 길이는 같다. 일반적으로 고유치 집합은 다양체의 면적과 경계의 길이를 결정한다.)

다양체의 가장 중요한 위상적 불변량은 오일러가 정의한 오일러 지표(Euler characteristic)이다. 우리가 잘 아는 바와 같이, 2차원 다각형의 경우에 이는 “(꼭짓점의 개수)–(모서리의 개수)+(면의 개수)”로 주어진다. 이

를 위상기하학적으로 추상화시키면, 점, 선, 면의 개수는 다양체의 각 차원의 호몰로지공간의 차원으로 주어지며, 다양체의 오일러 지표는 이들을 부호를 바꾸어 가면서 더한 값이다. 한편, 하지 이론(Hodge theory)에 의하면, 위상적으로 정의된 호몰로지 공간의 차원은 각 차원의 미분형식에 작용하는 라플라스작용소의 영공간의 차원과 같다. 따라서 다양체의 오일러 지표는 라플라스작용소들의 영고유치들로 결정됨을 알 수 있다.

위의 두 예에서 알 수 있듯이, 다양체를 연구하는데 있어서 라플라스작용소의 고유치집합이 중요한 역할을 함을 알 수가 있다. 따라서 라플라스작용소와 같은 기하학적 미분작용소들의 고유치들을 체계적으로 연구함으로써, 주어진 다양체의 구조를 규명하고자 하는 것은 자연스러운 시도라고 할 수 있다. 이와 같은 원리를 이용하여 증명된 가장 큰 성과물이 1970년대의 “다양체의 지표정리”를 열 방정식(heat equation)을 이용하여 증명한 것이다. 1960년대에 아티야–싱어(Atiyah–Singer)는 K–이론을 이용하여 일반적인 지표정리(index theorem)를 증명하였다. 이 이론은 가우스–보네 정리, 리만–로흐 정리, 힐제브르흐 사인 정리 등을 포함하는 일반적인 정리이다. 1970년대에 이 지표정리는 아티야–보트(Atiyah–Bott), 길키(Gilkey) 등에 의해 열 방정식을 이용하여 새롭게 증명되었는데, 이 증명은 기하학적 문제의 대역해석학적 방법론을 처음으로 제시한 것으로 평가 받고 있다.

다양체 위에서의 열 방정식은 라플라스 작용소로 결정된 온도가 시간이 경과함에 따라 어떻게 변화하는지를 알려주는 방정식이다. 열 방정식의 기본해(fundamental solution)는 라플라스 작용소의 전체 고유벡터와 고유치들로 나타낼 수 있다. 이 방정식의 기본해의 초기값과($t=0$일 때) 무한대값($t=\infty$일 때)은 각각 다양체의 국소적, 대역적 정보를 갖고 있다. 그리고 이들 사이의 등식은 다양체의 곡률(curvature)로 주어진 특성류(characteristic class)와 오일러 지표와 같은 기하학적인 지표와의 등식을 주게 되며, 이로부터 아티야–싱어의 지표 정리를 얻게 된다.

열 방정식을 이용한 지표 정리의 증명은 1970년대 중반에, 경계를 갖는 다양체(manifold with boundary)의 경우로 아티야–파토디–싱어(Atiyah–Patodi–Singer)에 의해 확장 되었는데, 이 경우에는 경계 다양체(boundary manifold)로부터 에타 불변량(eta invariant)이라고 불리는 새로운 항이 얻어졌다. 아티야–파토디–싱어가 정의한 에타 불변량은 자기대칭(self adjoint) 일차 미분작용소에 대해 정의된다. 이러한 작용소는 무한한 개수의 양의 고유치들과 음의 고유치들을 갖게 되는데, 이를 정규화 과정(regularization)을 통하여, 원래의 자기대칭 일차 미분작용소의 부호(signature)에 해당하는 값을 에타불변량으로 정의한다. 기하학에서 정의된 많은 불변량은 곡률을 통하여 표현가능한데, 이는 그러한 불변량을 국소적으로 주어지는 정보로 이해할 수 있음을 말한다. 그러나 에타불변량은 곡률로 표현가능하지 않으며, 이는 에타불변량이 보다 대역적인 정보를 갖고 있음을 뜻한다. 에타불변량은 3차원 다양체의 경우에 천–사이몬(Chern–Simons) 불

변량과(상수차이로) 같고, 일정한 곡률을 갖는 3차원 다양체(hyperbolic 3-manifold)의 연구에 중요하게 응용되고 있다. 열 방정식을 이용한 지표정리의 증명은 참고문헌 2,3, 경계를 갖는 다양체에 대한 지표 정리 증명은 참고 문헌 4를 보시기 바란다.

위에서 언급한 에타불변량과 같이 기하학적 미분작용소의 고유치들로 정의된 또다른 불변량이 디터미넌트(determinant)이다. 이 불변량은 자기대칭 이차 미분작용소에 대해 정의되는데, 이러한 기하학적 미분작용소는 무한한 개수의 음이 아닌 고유치들을 갖는다. 디터미넌트는 양의 고유치들만을 regularization 과정을 통하여 곱한 값으로 정의된다. 라플라스작용소의 디터미넌트는 에타불변량보다 더욱 대역적인 불변량이라고 할 수 있다. 이는 에타불변량은 그 자체로는 국소적 정보로 표현 가능하지 않지만, 에타불변량의 변환(variation)은 국소적 정보로 표현 가능한데 비해서, 디터미넌트는 그 자체로도, 그의 변환도 국소적 정보로 표현 가능하지 않기 때문이다. 따라서 이를 구체적으로 계산하기는 매우 어렵지만, 대역적 정보를 갖고 있는 중요한 불변량으로 이해되고 있다.

주어진 미분다양체의 각 차원의 미분형식에 작용하는 라플라스 작용소 각각의 디터미넌트를 정의할 수 있으며, 이를 적당한 방법으로 곱한 값으로 정의된 불변량을 해석적 토션(analytic torsion)이라고 한다. 이는 레이-싱어(Ray-Singer)에 의해 라이데마이스터 토션(Reidemeister torsion)의 해석적 대응 불변량으로 도입되었으며, 두 불변량이 같음이 후에 치거(Cheeger)와 뮐러(Müller)에 의해 증명되었다. 복소 다양체의 경우에도 비슷한 방법으로(Dolbealut complex를 이용) 해석적 토션을 정할 수 있으며, 이 불변량은 모듈라이 공간의 디터미넌트 라인 번들(determinant line bundle)의 퀼렌 메트릭(Quiller metric)을 정의하는데 중요하게 쓰이고 있다.

위에서 소개한 에타불변량, 디터미넌트, 해석적 토션은 모두 기하학적 미분작용소의 고유치들로 정의되었기 때문에, 이들을 스펙트랄 불변량(spectral invariant)라고 부른다. 1990년대 이후에 대역해석학 연구의 중심적인 주제들은 이들 불변량의 성질을 연구하고, 다른 분야의 문제에 응용하는 것이었다. 이 중에서도 주어진 다양체를 두 다양체로 분할했을 때, 전체 다양체와 분할된

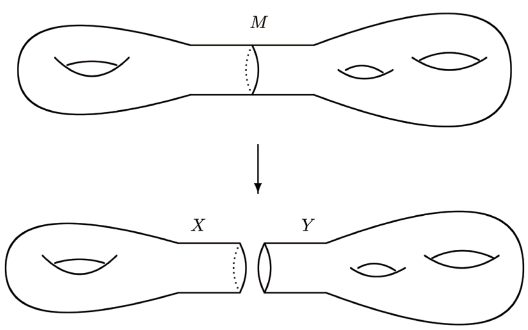

그림 2. M을 경계를 갖는 다양체 X,Y로 분할하고, 각각에서 정의된 불변량의 관계식을 얻는 것은 대역해석학의 주요 문제였다.

다양체에서 정의된 불변량이 어떤 관계를 갖는지가 중요한 문제였다. 스펙트랄 불변량에 대한 자세한 소개는 이윤원 교수의 글을 참조 바란다.

위의 내용은 모두 다양체가 compact하고, smooth한 경우에만 성립하는 사실들이다. 이러한 조건이 없는 경우에는 위의 결과들과 이론들을 확장하는데 많은 어려움이 생기는데, 현재 대역해석학의 주요한 연구 대상은 compact하고 smooth한 다양체에서 증명된 결과들을 이러한 조건이 없는 다양체로 확장하는 것이다. 아래에서 간단하게 noncompact이며, smooth한 다양체의 경우에 발생하는 어려움과 이를 해결하기 위한 시도를 살펴보기로 한다.

주어진 다양체가 noncompact인 경우에는 기하학적 미분작용소는 더욱 복잡한 고유치들의 구조를 갖는다. 이 경우에 미분작용소는 이산적으로 분포하는 고유치들(discrete spectrum)과 연속적인 스펙트럼(continuous spectrum)이라는 일반적인 의미에서의 고유치를 갖는다. 그리고 연속적 스펙트럼은 scattering 작용소에 의해 결정되기 때문에 이를 이해하는 것이 noncomapact 다양체에서의 주요 문제가 된다. scattering 작용소는 다양체의 무한대에서 주어진 정보들이 다양체의 내부에서 어떻게 상호 작용을 일으키는지를 기술하며, 이러한 관점에서 scattering 작용소는 noncompact 다양체의 대역적 구조에 대한 정보를 갖고 있다고 볼 수 있다. 또한 noncompact 다양체에서의 이러한 이론은 무한대에서의 다양체의 기하학적 구조에 따라 많은 차이를 가져오게 된다.

위에서 언급한 열 방정식의 기본해를 주는 적분작용소를 noncompact 다양체에서도 정의할 수 있으며, 이 적분작용소를 라플라스 변환하여 얻어지는 작용소가 주어진 미분작용소의 resolvent 작용소이다. 대역해석학의 대부분의 결과들은 이 resolvent 작용소를 분석하여 얻어지는 것이다. noncompact 다양체의 경우에 이러한 형식의 적분작용소의 슈바르쯔 커널(Schwartz kernel)을 체계적으로 분석함으로써, compact 다양체에서 얻었던 결과를 확장하려는 방법이 멜로즈(Melrose)에 의해 1990년대에 제시되었다. 앞에서 언급되었듯이 무한대 근처에서의 기하적 구조가 이 적분작용소의 슈바르쯔 커널에 많은 차이를 주며, 이에 대한 해석적 이해가 멜로즈가 제시한 방법의 핵심적인 내용이다. 무한대 근처에서의 메트릭이 실린더 구조인 경우에 대한 멜로즈 이론은 참고 문헌 5를 참조 바란다.

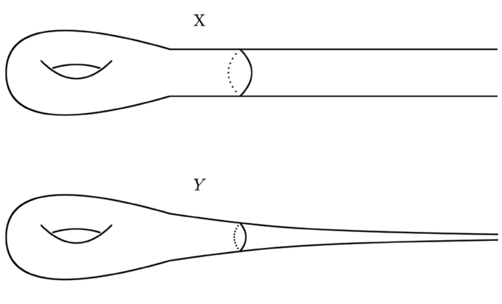

그림 3. 실린더 모양의 끝을 갖는 X에서 정의된 라플라스 작용소의 연속적 스펙트럼은 $[0, \infty)$이지만, 커스프(cusp) 모양의 끝을 갖고 곡률(curvature)이 -1인 Y에서 정의된 라플라스 작용소의 연속적 스펙트럼은 $[1/4, \infty)$ 이다. 이러한 차이는 두 경우의 라플라스 작용소 연구에 본질적으로 다른 접근법을 요구한다.

현재 noncompact 다양체에서의 대역해석학의 연구는 시작 단계이며, 여러 경우를 일반적인 이론으로 다루려는 시도는 좋은 성과를 이루지 못한 상황이다. 마지막으로 이 분야의 오래된 미해결 문제를 언급하면

서 이 글을 맺고자 한다. 일정한 음의 곡률을 갖는 noncompact 2차원 다양체는, 부피(volume)가 유한인가에, 무한인가에 따라 라플라스작용소의 스펙트럼에 큰 차이가 있다. 부피가 무한인 경우에는 이산적 고유치가 항상 유한개만 존재한다. 그러나, 부피가 유한인 경우의 특수한 예에서는 이산적 고유치가 무한히 많이 존재한다는 것이 알려져 있다. 그러나 이러한 현상이 유한 부피의 경우에 일반적으로 성립하는지는 아직 미해결 문제이다. 이 문제는 60년대에 셀버그–로엘케(Selberg–Roelcke)에 의해 처음으로 제기되었으며, 뒤에 사르낙(Sarnak)에 의해 좀 더 일반적인 경우(locally symmetric space)로 확장되었다. 이 문제는 50년이 지난 지금에도 많은 수학자들의 연구에도 불구하고, 미해결 문제로 남아 있다. 사르낙의 예측은 참고 문헌 6을 참조 바란다.

참고문헌

1. Kac, Mark, Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly 73 1966 no. 4, part II.
2. Gilkey, Peter B., Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah–Singer index theorem. Second edition. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
3. Berline, Nicole; Getzler, Ezra; Vergne, Michele, Heat kernels and Dirac operators. Corrected reprint of the 1992 original. Grundlehren Text Editions. Springer–Verlag, Berlin, 2004.
4. Booß–Bavnbek, Bernhelm; Wojciechowski, Krzysztof P., Elliptic boundary problems for Dirac operators. Mathematics: Theory & Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.
5. Melrose, Richard B. The Atiyah–Patodi–Singer index theorem. Research Notes in Mathematics, 4. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993.
6. Sarnak, Peter On cusp forms. The Selberg trace formula and related topics (Brunswick, Maine, 1984), 393–407, Contemp. Math., 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

박진성

고등과학원 수학부 교수로 서울대학교 수학과에서 학사, 석사, 박사를 받았다.
주 연구분야는 대역해석학이며, 저널 Annals of Global Analysis and Geometry 의 편집위원이다.