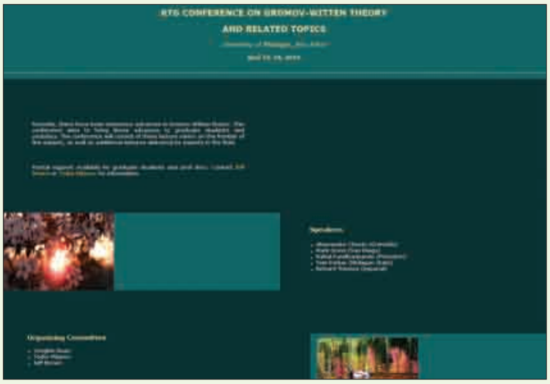
Gromov-Witten 이론의 연구동향

글 _ **정대웅** · 고등과학원 수학부 연구원

1990년대 초에 시작된 Gromov-Witten (GW) 이론은 거울대칭이론을 구성하고 있는 이론들 중 가장 잘 정립되어 있고 많이 발전되어 온 분야이다. 비록 다른 수학분야에 비해 현저히 짧은 역사를 가지고 있지만 그간 눈부실만한 발전을 해왔으며 현재에도 다른 분야와 교류하면서 여전히 진화 발전 과정에 있다. 그동안 이 분야에서 얻어낸 수학적 결과물들의 양은 실로 방대하여 연구동향을 한 페이지에 기술하는 것은 쉬운 일이 아니다. 하지만 오해의 위험을 무릅쓰고 범위를 아주 좁히고 단순화시키면 대략 세 가지 정도로 분류할 수 있을 것 같다.



출처: http://www.math.lsa.umich.edu/conferences/rtgGromovWitten10/index.html

첫째, 주어진 다양체의 GW 불변량들의 계산이다. 이들 불변량들 각각은 일반적으로 유리수로 주어지며, 각각의 다양체는 무한개의 불변량을 갖는다. 이들 무한개의 불변량을 계산한다는 것은 퀀텀 코호몰로지 환을 찾거나, J-함수를 찾는 것을 의미한다. 일반적으로 이들을 계산하는 것은 상당히 어려우며, 각 다양체마다 다른 접근 방식들이 요구된다. 그동안 계산된 주요 다양체들로는 Calabi-Yau 3차원 다양체들, Toric 다양체들, Homogeneous 다양체들 등등이 있다.

둘째, 두개의 '관련 있는' 다양체들에 대해 GW 불변량들의 관련성을 찾는 것이다. 고전적 코호몰로지 이론과는 달리, GW 이론에서는 두개의 관련된 다양체들의 불변량들의 관계를 균등하게 찾을 수 없다. 하지만 두 다양체의 관계가 '특수한' 경우에는 관련성이 개별적으로 밝혀지고 있다. 예를 들면 두 다양체가 서로에게 flip인 경우, 하나가 다른 하나의 부분다양체인 경우, 하나가 다른 하나의 blow-up인 경우, 두 다양체가 abelian/nonabelian quotient인 경우 등등에 대해서는 불변량들의 관계가 부분적으로 알려져 있다.

셋째, 어떤 모듈라이 공간을 새롭게 컴팩트화하는 문제이다. GW 이론을 전개하기 위해서는 컴팩트가 아닌 어떤 모듈라이 공간을 컴팩트화해야 하는데 원래의 GW 불변량은 콘세비치의 컴팩트화로부터 나온 것이다. 최근 연구 경향 중의 하나는 새로운 컴팩트화를 찾아서 기존의 것과 비교하거나, 더 나아가 기존의 불변량을 찾는데 이용하고 있다.

수학의 다른 분야와 마찬가지로 이 이론도 다른 수학과 교류하면서 다양한 방향으로 확대 발전하고 있다. 예를 들면 오비폴드 경우로 이론이 확대되고, 게이지 이론적인 GW 이론이 최근에 생겨나 연구가 활발히 진행 중이다. 연구 성과를 교류하기 위한 각종 워크숍이나, 젊은 수학자들을 위한 강의들이 세계 곳곳에서 열리고 있다. 한국에서도 매년 한두 개의 워크숍이 열리고 있으며, 특히 고등과학원에서는 정기적인 워크숍 외에도 매주 많은 세미나들이 열리고 있다. 워크샵에 관한 구체적인 정보는 웹사이트 http://www.ams.org./mathcal/ 에서 얻을 수 있다.