최적 소비 및 투자 문제

글 _ **신용현** · 고등과학원 계산과학부 연구원

1. 도입

1970년대 초반 Black, Scholes, Merton[1)]에 의해서 파생상품이론(Option Pricing Theory)이 탄생된 이후로, 수많은 수학자들이 경영학과 경제학의 영역에서만 머물러 있던 재무/금융(Finance)에 관심을 가지고 참여하게 된다. 그 결과로 금융이론(Finance Theory) 및 금융공학(Financial Engineering)이 현재의 엄밀하고 세련된 학문의 형태로 발전되게 되었으며, 금융수학(Mathematics of Finance)이라는, 수학의 추상성을 간직하면서도 실제적인 실무 현장과 매우 가까운, 매력적인 학문이 탄생하게 되었다.

특히 Merton(1969, 1971)의 경우 이러한 파생상품이론뿐만 아니라, 이산적으로만 고려되어져 오던 기존의 최적 소비 및 투자 문제(Optimal Consumption and Investment Problem)를 확률미분방정식(Stochastic Differential Equation)이라는 수학적 툴을 이용하여 연속적인 방법으로 해를 제시하였다. Merton의 이러한 결과 이후, 1980년대부터 본격적으로 Karatzas, Shreve, Oksendal, El Karoui, Zariphopoulou 같은 수학자들의 최적 소비-투자 문제에 대한 연구 논문이 발표되기 시작했다.

Robert C. Merton

Myron S. Scholes

이러한 시기가 금융수학이라는 학문이 응용수학으로서의 출발점으로 볼 수 있을 것이다.

경제학/재무학적으로 최적 소비-투자 이론은 재무이론(Financing Theory)의 가장 중심이 되는 자산 가격 결정이론(Asset Pricing Theory)의 수리적인 근간이 되는 문제이다. 이 이론은 자본 시장(Capital Market)에 존재하는 각각의 위험을 회피하려고 하는 합리적인 개인 투자자(Agent)가 자신의 자산에서 최적의 소비와 최적의 포트폴리오(Portfolio)를 어떻게 구성하느냐에 관한 것이다. 이때, 위험 자산(Risky Asset)과 무위험 자산(Riskfree Asset)에 투자하는 최적 비율의 결정, 즉 시장에 시시각각 들어오는 위험에 대한 동태적 헤징(Dynamic Hedging)을 어떻게 하는가는 매우 중요한 문제가 된

1) Scholes와 Merton은 이러한 공로로 1997년 노벨 경제학상을 수상하였다.

다. 또한, 이렇게 구한 각 투자자의 최적 해를 합하면 (Aggregate) 시장 전체가 가지고 있는 전체 소비와 시장의 포트폴리오(Market Portfolio)를 알 수 있으며, 이 최적 수요를 통하여 기본 자산의 가격을 시장 청산 조건(Market Clearing Condition)을 적용하여 도출할 수 있게 된다. 따라서 주식, 채권, 부동산 등의 유동적인 자산에 투자 자금을 배분하는 자산선택문제(Asset Allocation)는 그 학문적인 중요성뿐만 아니라, 기관 투자자 및 개인 투자자의 효율적인 투자를 위하여 매우 중요한 문제로 인식되고 있다. 또한 이 문제는 경제학적으로 투자자가 미래 자산 가치의 기대효용(Expected Utility)을 극대화하는 재무 경제학 모형(Financial Economic Model)으로 공식화할 수 있다.

2. 최적 소비-투자 문제의 수학적 접근

일반적으로 주어지는 최적 소비-투자 문제의 수학적인 정의를 살펴보기 위해, 시장에는 하나의 주식만이 존재한다고 가정하고, 그 주식(S_t)은 다음과 같은 기하브라운운동(Geometric Brownian Motion)을 따른다고 가정하자.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t. \tag{1}$$

그리고 시장에서의 이자율이 r로 주어질 때, 다음과 같은 기대효용함수를 목적 함수로 정의할 수 있다.

$$V(t, x) = \max_{c,\pi} E\left[\int_t^T e^{-\beta(s-t)} u(c_s) ds + e^{-\beta(T-t)} U(X_T) \middle| X_t = x\right]. \tag{2}$$

여기서 c는 소비 비율을, π는 위험자산에 투자하는 비용을, β는 개인적인 할인율(Subjective Discount Rate)을, T는 만기를, X_T는 만기에서의 투자자의 재산을, x는 시간이 t일 때의 재산을 나타낸다. 또한 두 함수 $u(\cdot)$와 $U(\cdot)$는 투자자의 효용함수(Utility Function)를 나타낸다.

효용함수는 소비나 재화가 정의역으로, 그에 따른 행복의 수준이 치역으로 주어진다. 이러한 효용함수는 증가($u'(\cdot)>0$)하면서 위로 볼록($u''(\cdot)<0$)한 형태를 취하는데, 이러한 가정은, 소비(혹은 재산)가 증가할 때 행복의 수준이 증가하지만, 어느 정도 수준 이상의 소비에서의 증가분은 더 작은 수준에서의 동일한 증가분보다 행복의 수준을 증가시키지 못한다는 뜻을 의미하고 있다. 즉, 오늘 100원을 쓰다가 내일 200원을 쓰면(증가분 100원) 사람들은 매우 행복해 하지만, 오늘 1,000,000원을 쓰다가 내일 1,000,100원을 쓴다고 할 때(증가분 100원) 사람들의 행복 수준이 앞의 경우만큼 증가하지는 않을 것이라는 얘기이며 아주 직관적인 가정이다.

그러면 이렇게 주어진 목적함수를 어떻게 최대화할 것인가에 대한 수학적 질문이 주어질 수 있을 것이다. 이러한 문제를 푸는 방법은 크게 나누어 두 가지 정도를 볼 수 있는데, 첫 번째 방법이 최적화 기법의 하나인 동적 프로그래밍 방법(Dynamic Programming Method)을 사용하여 Hamilton-Jacobi-Bellman 편미분 방정식(Partial Differential Equation, PDE)을 푸는 것으로 주어진 모형의 해(Solution)를 구하는 것이다. 위 (2) 번식의 경우(특별한 제약 조건이 없는 경우), 다음과 같은 방정식이 얻어진다.

$$\max_{c,\pi}\left[V_t + (rx + \pi(\mu - r) - c)V_x + \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2 V_{xx} + e^{-\beta t}u(c)\right] = 0. \tag{3}$$

두 번째로는 경제학자인 Cox and Huang(1989)과 수학자인 Karatzas, Lehoczky, and Shreve(1987)에 의해 상호 독립적으로 제시된 마팅게일 방법(Martingale Method)이 있다. 이 방법은 마팅게일의 정의와 이원함수(Dual Function)를 이용하여 최적화 문제를 해결하는 방법이다.

일반적으로는 동적 프로그래밍 방법은 비선형 편미분방정식(Nonlinear PDE)을 풀어야 하기 때문에

해석적 해(Analytic Solution)를 구하기가 매우 어려워서 좀 더 일반적인 가정에서 해의 존재성과 유일성을 증명하는 소수의 테크닉들만이 개발되었을 정도이다. 따라서 경우에 따라서는 수치적 해(Numerical Solution)에 초점을 많이 맞추고 있다. 마팅게일 방법의 경우는 해에 대한 존재성과 유일성들을 증명하는 데에 유용하게 사용될 수 있다.

3. 최적 소비-투자 문제의 최근 연구들

최적 소비-투자 문제에 대한 최근의 연구들을 살펴보면, 먼저 투자자의 재산 수준(Wealth Level)이 음수가 되지 않는, 즉 항상 0 이상의 값을 가질 때의 문제[2)]를 He and Pages(1993), Dybvig and Liu(2005), Farhi and Panageas(2007), Choi, Shim, and Shin(2008), Lim and Shin(2007) 등이 고려하였다. 노동 수입(Labor Income)이 고려되는 문제의 경우에는 현재의 자산이 음수가 되더라도 미래의 노동 수입을 미리 대출(Borrow)하여 투자자가 계속 소비를 하게 되는 결과를 얻게 된다. 그 이유는 할인(Discount)된 미래의 노동 수입을 현재의 자산으로 포함을 시켜 생각할 수 있기 때문이다. 그래서 자산이 음수가 되지 않는, 즉 양수로 계속 유지되는 경우의 해를 구하는 문제는 수학적으로나 경제학적으로도 매우 중요한 의미가 있다고 생각되고 있다. 특히 Lim and Shin(2007)의 경우 일반적인 효용 함수를 사용하여 닫힌 해(Closed-Form Solution)를 제시하였다.

경제학의 오랜 Puzzle 중 하나인 Asset Allocation Puzzle[3)]과 같은 문제를 설명하려는 노력이 여러 가지가 있었다. 그 몇 가지 예로는 거래 수수료 문제(Transaction Cost Problem)[4)]나, 투자자의 소비 성향 문제(Habit Formation)[5)] 같은 것들이 있다. 그 중에서도 가장 유망한 접근법 중의 하나가 귀납적으로(Recursive) 정의된 효용함수를 가진 투자자의 소비-투자 문제를 고려한 것이다. 이는 Epstein and Zin(1989)이 처음으로 체계화시키고 Duffie and Epstein(1992)이 최초로 연속시간(Continuous-Time) 모형을 제시한 후에, Shroder and Skiadas(1999)에 의해서 많은 발전이 있었다. 이런 귀납적 효용함수 모형은 Forward-Backward Stochastic Differential Equation(FBSDE) 방법이라는 고급 확률론 방법을 이용하여 해를 제시한다.

Karatzas and Wang(2000)은 최적 소비-투자문제에서 마팅게일 방법을 이용하여, 처음으로 임의의 멈춤 문제와 결부시키는 이론을 제시하였다. 이 결과는 투자자의 최적 소비-투자-은퇴 문제(Optimal Consumption, Investment and Retirement Choice Problem)를 해결할 수 있는 수학적인 툴을 최초로 제공하긴 했지만, 아직 그 표현이 추상적인 면이 강하였고, 경제학적으로 어떤 실제적인 응용이 가능한 지에 대해서는 미지수였다. 소비-투자-은퇴 문제의 응용으로 Dybvig and Liu(2005), Choi and Shim(2006), Farhi and Panageas(2007), Choi, Shim, and Shin(2008) 등이 이러한 접근으로 최적 은퇴 문제의 해결책을 제시하였다. 특히 Choi, Shim, and Shin(2008)은 처음으로 노동과 레저(Labor-Leisure) 문제를 고려하여 최적 투자, 소비, 레저 및 은퇴 결정 문제의 해를 구하였다. 특별히 인간의 생명이 길어지고 다양한 삶의 질을 추구하며 일찍 은퇴를 하려는 요구가 사회적으로 많아지고, 은퇴 후의 삶에 대한 관심이 점점 더해가는 가운데에 수리적으로 최적 은퇴 해를 찾는 과정과 그것의 경제학적인 의미를 부여하는 것은 앞으로는 더욱 더 중요한 이슈가 될 것이라 생각된다.

2) 이러한 제약을 Borrowing Constraints 또는 Liquidity Constraints 라고 한다.
3) 이론적 계산으로 나온 최적 투자의 양보다 실제로 투자자들이 덜 투자하는 문제
4) Constantinides(1986), Liu and Loewenstein(2002), Jang, Koo, Liu, and Loewenstein(2007)
5) Constantinides(1990), Campbell and Cochrane(1999)

4. 최적 소비-투자 문제의 실무적 활용 방안

선진국으로 갈수록 서비스 산업이, 그 중에서도 특히 금융 산업이 사회에서 차지하는 비중이 점차 커지는 것이 일반적인 경향이다. 금융수학은 수학의 한 학문 영역으로서 수학이 추구하는 추상성과 엄밀성을 지키고 있지만, 산업현장과 거리가 비교적 가까운 실용적인 면도 가지고 있다. 현재의 우리나라의 경우, 기관, 연기금, 그리고 펀드 등을 통한 간접 투자가 활발해지고 있다. 이러한 간접 투자에서 수익과 위험의 상반관계(Tradeoff)를 고려한 수학적인 투자기법을 사용할 필요성과 중요성은 더욱 증가하리라고 볼 수 있다. 이러한 최적 소비-투자 방법을 사용한 간접 투자로 국민들에게 위험을 적절하게 보호하고, 또한 적절한 수익을 가져다 줄 수 있을 것으로 기대한다.

[참고문헌]

[1] J.Y. Campbell, J.H. Cochrane (1999): Journal of Political Economy 107, 205-251.

[2] K.J. Choi, G. Shim (2006): Mathematical Finance 16, 443-467.

[3] K.J. Choi, G. Shim, Y.H. Shin (2008): Mathematical Finance 18, 445-472.

[4] G.M. Constantinides (1986): Journal of Political Economy 94, 842-862.

[5] G.M. Constantinides (1990): Journal of Political Economy 98, 519-543.

[6] J.C. Cox, C.F. Huang (1989): Journal of Economic Theory 49, 33-83.

[7] D. Duffie, L.G. Epstein (1992): Econometrica 60, 353-394.

[8] P.H. Dybvig, H. Liu, “Lifetime Consumption and Investment: Retirement and Constrained Borrowing”, working paper, Washington University in St. Louis, 2005.

[9] L.G. Epstein, S.E. Zin (1989): Econometrica 57, 937-969.

[10] E. Farhi, S. Panageas (2007): Journal of Financial Economics 83, 87-121.

[11] H. He, H.F. Pages (1993): Economic Theory 3, 663-696.

[12] B.G. Jang, H.K. Koo, H. Liu, M. Loewenstein (2007): Journal of Finance 62, 2329-2366.

[13] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S.E. Shreve (1987): SIAM Journal on Control and Optimization 25, 1557-1586.

[14] I. Karatzas and H. Wang (2000): SIAM Journal on Control and Optimization 39, 306-329.

[15] B.H. Lim, Y.H. Shin, “Optimal Investment, Consumption and Retirement Decision with Disutility and Liquidity Constraints”, working paper, KAIST, 2007.

[16] H. Liu, M. Loewenstein (2002): Review of Financial Studies 15, 805-835.

[17] R.C. Merton (1969): Review of Economics and Statistics 51, 247-257.

[18] R.C. Merton (1971): Journal of Economic Theory 3, 373-413.

[19] M. Schroder, C. Skiadas (1999): Journal of Economic Theory 89, 68-126.