유계 대칭 영역(bounded symmetric domain)과 요르단 대수(Jordan algebra)

글 _ **박종도** · 고등과학원 수학부 연구원

리만(B. Riemann, 1826~1866)의 박사학위논문(1851년)에 포함되었던 리만 사상 정리에 따르면, 복소평면 전체가 아닌 모든 단순 연결 영역(simply connected domain)은 단위원판 $\Delta:\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$과 정칙 동치(holomorphically equivalent)이다. 즉, 구멍이 없이 연결되어 있는 영역은 단위원판만 연구하면 어떤 의미에서는 충분하다는 뜻이다. 그렇다면, 단위원판은 어떤 성질을 갖고 있는가? 복소함수론 시간에 등각사상이나 뫼비우스 변환을 배울 때, 항상 등장하는 두 개의 뫼비우스 변환이 있다.

(I) 주어진 $a\in\Delta$에 대하여, $w_1(z)=\dfrac{z-a}{\bar{a}z-1}$ 은 Δ를 Δ위로 일대일 대응한다.

(II) $w_2(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$ 는 상반평면(upper half-plane)을 Δ위로 일대일 대응한다.

학부생들에게 좋은 연습문제가 될 수 있는 이 두 문장이 역사적으로 어떤 발전이 있었는가를 살펴보도록 한다.

1926년에 카르탄(E. Cartan)은 리만 대칭 공간(Riemannian symmetric space)의 모든 형태를 7개의 (무한히 많은 차원의 경우를 포함하는) 고전적인(classical) 형태와 12개의 (고정된 차원의) 예외적인(exceptional) 형태로 분류하였다. 그 중에서 비 컴팩트형(non-compact type) 에르미트(Hermitian) 대칭 공간은 복소 벡터공간에서의 유계 대칭 영역으로 표현되는데, 4개의 고전적인(classical) 형태와 2개의 예외적인(exceptional) 형태로 분류된다. 이 글에서 다루고자 하는 유계 대칭 영역의 정의를 먼저 설명하겠다. D를 $\mathbb{C}^n$의 영역이라고 할 때, 임의의 두 점 p, $q\in D$에 대하여, p를 q로 보내는 정칙 자기동형사상(holomorphic automorphism)이 존재하면, 영역 D를 동질(homogeneous) 영역이라고 부른다. 만약, $s\circ s$는 항등사상이 되고 $p\in D$만을 고정하는 정칙 자기동형사상 s가 존재하면, s를 p의 대칭사상(symmetry)이라고 부르고, 대칭사상을 갖는 점이 존재하는 동질 영역 D를 대칭 영역이라고 한다. 위의 (I)을 이용하면 단위원판이 유계 대칭 영역이라는 사실을 알 수 있다. 물론, 리만 사상 정리에 의하여 복소평면 전체가 아닌 모든 단순 연결 영역도 대칭 영역이다. 그렇다면, 리만 사상 정리마저 성립하지 않는 $\mathbb{C}^n(n\geq 2)$에는 얼마나 많은 유계 대칭 영역이 있겠는가? 카르탄이 사용한 semi-simple Lie algebra 이론을 배제하고, 요르단 대수(Jordan algebra) 이론을 바탕으로 유계 대칭 영역을 이해하는 방법을 설명하고자 한다. 기하학의 대상을 행렬들의 집합으로 이해하는 관점은 상당히 매력적이다.

1. 요르단 대수

요르단 대수는 독일의 물리학자인 요르단[1](P.

1) Jordan curve theorem이나 Jordan normal form에 나오는 Camille Jordan과는 다른 과학자이다.

Jordan, 1902~1980)에 의해 만들어지고 연구되었다. 양자역학(quantum mechanics)과 양자장론(quantum field theory)에 커다란 공헌을 한 그는 두 에르미트 행렬 A, B에서 새로운 에르미트 행렬을 만드는 방법을 생각하였는데, $A\cdot B=\frac{1}{2}(AB+BA)$이 가장 중요하다고 생각하였다. 두 행렬의 곱을 $AB=\frac{1}{2}(AB+BA)+\frac{1}{2}(AB-BA)$라고 쓸 때, 뒷부분이 리 대수(Lie algebra)를 이끌었다면, 앞부분은 요르단 대수의 시초가 되었다. 요르단 곱이라고 하는 이항 연산 ·은 다음과 같은 성질들을 만족한다.

(1) $x\cdot y=y\cdot x$ (2) $x\cdot(x^2\cdot y)=x^2\cdot(x\cdot y)$

(3) $x_1^2+\cdots+x_r^2=0$이면, $x_1=\cdots=x_r=0$

1934년에 요르단은 두 명의 유명한 헝가리 과학자 폰 노이만(J. v. Neumann)과 위그너(E. Wigner)와 함께 위의 성질들을 바탕으로 요르단 대수의 첫 논문[2]을 발표하였다. 일반적으로 벡터공간 V가 (1)과 (2)를 만족하는 이항연산 ·이 있으면, $(V\cdot)$를 요르단 대수라고 정의하고, (3)까지 만족하면, formally real[3] 요르단 대수라고 한다. (2)가 상당히 이상한 식처럼 보이겠지만, 요르단 대수의 가장 핵심이 되는 항등식이다. (1)과 (3)을 만족하는 벡터공간에 대하여, (2)는 $x^p\cdot x^q=x^{p+q}$가 성립하는 것과 동치이다. 즉, 유클리드 요르단 대수는 결합법칙은 성립하지 않지만, 멱 결합법칙(power associativity)은 성립하기 때문에, 수학적으로나 물리학적으로나 중요한 의미를 갖는다. 일반적으로 결합대수 $(A,\circ)$는 항상 $x\cdot y=\frac{1}{2}(x\circ y+y\circ x)=x^2$에 의하여, $(A,\cdot)$는 요르단 대수가 된다. 이렇게 생성되는 요르단 대수나 그의 요르단 부분대수를 특별한(special) 요르단 대수라고 하고, 그렇지 않으면 예외적인(exceptional) 요르단 대수라고 부른다. 위에서 언급한 논문에 따르면, 모든 유한차원의 유클리드 요르단 대수는 $Sym(m,\mathbb{R})$, $Herm(m,\mathbb{C})$, $Herm(m,\mathbb{H})$, $Herm(3,\mathrm{O})$과 Spin factor$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$들의 직합(direct sum)으로 나타내어진다. 이 때, 8원수(octonion)는 비결합적이므로, $Herm(3,\mathrm{O})$는 특별한 요르단 대수가 아니라고 추측되었는데, 이는 알버트(A. A. Albert)가 증명을 했기 때문에, 알버트 대수(Albert algebra)라고도 부른다. 하지만, 유클리드 요르단 대수 중에 예외적인(exceptional) 것은 $Herm(3,\mathrm{O})$ 하나뿐이었고, 3보다 큰 m에 대하여, $Herm(m,\mathrm{O})$는 심지어 요르단 대수조차 아니었다. 무한차원의 예외적인 대수와 요르단 대수와의 관계에 관심이 있었던 과학자들의 희망은 젤마노프(E. Zelmanov)에 의해 사라졌다. 그는 무한차원까지 고려하더라도 예외적인 요르단 대수는 알버트 대수가 유일하다는 사실을 1979년에 증명하였다. 요르단 대수의 관심이 끝난 것처럼 보였지만, 다른 분야로의 극적인 발전은 1960년대부터 이미 이루어지고 있었다.

2. 대칭원뿔(symmetric cone)

이제 (II)의 고차원의 경우를 생각해보자. (II)는 유계 대칭 영역(단위원판)을 유계가 아닌 영역(상반평면)으로 표현하는 중요한 예이다. 상반 평면 $\mathbb{R}+i\mathbb{R}^+$에서 $\mathbb{R}$을 어떻게 고차원으로 자연스럽게 확장할 수 있겠는가? 일반화된 상반공간(upper half-space)을 $V+i\Omega$라고 쓰자. 여러 시도가 있었겠지만, 지겔(C. L. Siegel, 1896~1981)의 시도가 가장 독보적이다. $V=Sym(m,\mathbb{R})$이고, $\Omega=Sym^+(m,\mathbb{R})$[4]인 경우의 상반공간을 지겔 상반공간(Siegel's upper half-space)이라고 하는데, 정수론의 중요한 분야인 지겔 보형 형식(Siegel modular form)의 연구에서 중요하게 쓰인다. 이 경우, 뫼비우스 변환 $w_2(Z)=(Z-iI)(Z+iI)^{-1}$에 대한 지겔 상반공간의

2) On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, Annals of Mathematics,1934

3) 결합법칙이 성립하는 양의 정부호 대칭 겹선형 형식(positive definite symmetric bilinear form)이 있는 요르단 대수를 유클리드 요르단 대수(Euclidean Jordan algebra)라고 하는데, formally real 요르단 대수와 동치인 개념이기 때문에, 앞으로는 유클리드 요르단 대수라고 부르기로 한다.

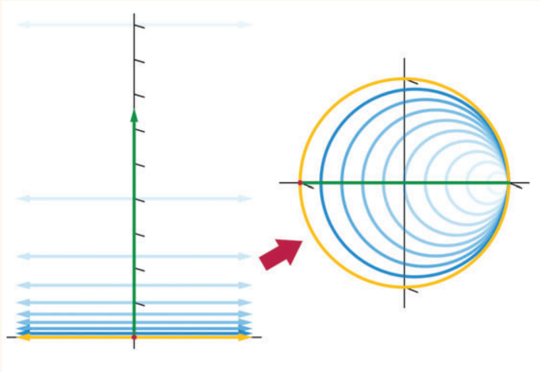
4) 양의 정부호 대칭 행렬(positive definite symmetric matrix)들의 집합이다.

상(image)은 $\{W\in Sym(m, \mathbb{C}):I-W\overline{W}>0\}$이다. 이미 언급한 대로, $V=Sym(m, \mathbb{R})$는 유클리드 요르단 대수이다. 그렇다면, V를 임의의 유한차원 유클리드 요르단 대수라고 하면, Ω는 V의 어떤 부분대수를 선택해야 하고, 적당한 뫼비우스 변환은 무엇이며, 그 변환의 상은 어떤 성질을 갖고 있을 것인가?

이 질문은 1960년대에 쾨허(M. Koecher)에 의하여 연구되기 시작하였는데, n차원 유클리드 요르단 대수와 $\mathbb{R}^n$의 대칭원뿔 사이에 일대일 대응관계가 있다. 양의 상수곱에 대하여 닫혀있는 집합을 원뿔이라고 하는데, 동질이고 자기쌍대(self-dual)인 원뿔을 대칭원뿔이라고 한다. 결론을 이야기하면, 단위원 e가 있는 유클리드 요르단 대수 V에 대응되는 Ω는 $\{x\cdot x:x\in V\}$의 내부가 되는데, 이는 대칭원뿔이 된다. 놀랍도록 단순한 구조인데, $\mathbb{R}$과 $\mathbb{R}^+$의 관계를 보면, 수긍이 되는 방법이다. 이 대칭원뿔의 여러 동치표현법 중에서 이해하기 쉬운 표현법은 $\Omega=\{x\in V:L(x)>0\}$이다. 여기에서 작용소 $L(x)$는 $L(x)y=x\cdot y$를 뜻한다. $V+iV$의 열린 볼록 집합인 $V+i\Omega$는 튜브(tube) 영역이다. 일반화된 뫼비우스 변환 $w_2(z)=(z-ie)(z+ie)^{-1}$에 의하여 생기는 상 $w_2(V+i\Omega)$가 바로 유계 대칭 영역이 된다. 즉, 단위원이 있는 유클리드 요르단 대수에, 유계 대칭 영역을 대응하는 체계적인 방법을 이해한 것이다. 앞에서 언급한 5개의 유클리드 요르단 대수에 각각 대응되는 5개의 유계 대칭 영역 D[5]가 만들어지는데, 이를 튜브 형(tube type)의 유계 대칭 영역이라고 부른다. 하지만, 카르탄이 분류한 유계 대칭 영역(4개의 고전적인 형태와 2개의 예외적인 형태)에서 빠진 것들이 있다. 이 불완전한 설명은 어떻게 보완할 수 있을까?

3. 요르단 삼중계(Jordan triple system)

요르단 대수는 애초에, 두 에르미트 행렬의 곱에서 나왔는데, 유계 대칭 영역의 행렬 표현에는 정사각행렬 뿐 아니라, 직사각행렬도 포함되어 있다. 그렇다면, 두 $p\times q$행렬 A, B의 자연스러운 이항 연산을 생각해봐야 하는데, 언뜻 떠오르지 않을 것이다. 그런데, 이항 연산은 아니지만, 대칭성까지 고려하고 있는 자연스러운 삼항 연산 $\{A, B, C\}:=AB^tC+CB^tA$는 어떠한가? 제이콥슨(N. Jacobson)도 삼항 연산의 필요성을 언급한 바 있다. 요르단 대수의 탄생과 비슷하게, 이 삼항 연산을 모델로 하여, 벡터공간 V에 다음의 두 조건을 만족하는 삼항 연산 $\{x, y, z\}$이 있으면, 우리는 $(V, \{\})$를 요르단 삼중계라고 부른다.



(i) $\{x, y, z\}=\{z, y, x\}$

(ii) $\{x, y, \{u, v, w\}\}=\{\{x, y, u\}, v, w\}-\{u, \{y, x, v\}, w\}+\{u, v, \{x, y, w\}\}$

리 대수의 야코비 항등식과 비슷한 형태처럼 보이는 (ii)가 상당히 복잡해 보이는데, $\{A, B, C\}=AB^tC+CB^tA$가 (ii)를 만족한다는 것은 쉽게 알 수 있다. 그렇다면, 요르단 삼중계도 처음부터 다시 시작해야 하는 것인가? 만약 그랬다면, 필자가 요르단 대수를 자세히 언급하지 않았을 것이다. 다행히도 요르단 대수와 요르단 삼중계 사이에는 다음과 같은 관계가 있다. 요르단 대수 $(V\cdot)$에 대하여 $\{x, y, z\}:=2((x\cdot y)\cdot z+(z\cdot y)\cdot x-(x\cdot z)\cdot y)$라고 하면, $(V, \{\})$는 요르단 삼중계가 된다. 역으로, 요르단 삼중계 $(V, \{\})$과 $z\in V$에 대하여, $x\cdot y=\frac{1}{2}\{xzy\}$라고 하면, $(V\cdot)$도 요르단 대수가 된다. 즉, 요르단 삼중계의 각 점에 대응

5) 마지막 페이지에 있는 표에서 b=0인 경우이다.

PHJTS	D	a	b	r
$M_{p,q}(\mathbb{C})$ $(p\leq q)$	$\{z:I-z\bar{z}^t>0\}$	2	$q-p$	p
$Sym(m, \mathbb{C})$	$\{z:I-z\bar{z}>0\}$	1	0	m
$Skew(m, \mathbb{C})$	$\{z:I+z\bar{z}>0\}$	4	m이 짝수면 0, 홀수면 2	$[m/2]$
$JSpin(m, \mathbb{C})$	$\{z\in\mathbb{C}^n:L(z, z)>1\}$ 6)	$m-2$	0	2
$Herm(3, O_{\mathbb{C}})$	7)	8	0	3
$M_{12}(O_{\mathbb{C}})$		6	4	2

표1

하는 요르단 대수 구조를 만들고 요르단 대수 이론을 적용한 후, 다시 요르단 삼중계로 돌아오면 된다. 1969년에 퀘허의 학생이었던 메이버그(K. Meyberg)가 리 대수의 TKK(Tits-Kantor-Koecher) 이론을 일반화하는 과정에서 요르단 삼중계를 연구하기 시작하였다.

다시 유계 대칭 영역으로 돌아오자. 튜브 형의 유계 대칭 영역은 유클리드 요르단 대수와 대응이 된다는 사실을 이미 설명하였다. 그렇다면, 어떤 요르단 삼중계가 임의의 유계 대칭 영역과 대응이 될 수 있을까? 유클리드 요르단 대수처럼 "양(positivity)"의 개념이 필요하다. $D(x, y)z:=\{x, y, z\}$라고 정의할 때, $(x, y):=Tr\,D(x, y)$가 양의 정부호 에르미트 내적이 되면, $(V, \{\})$를 양의 에르미트 요르단 삼중계(Positive Hermitian Jordan Triple System, PHJTS)라고 한다. Harish-Chandra 표현으로 유계 대칭 영역은 유계 동질 원형(circled) 영역과 정칙 동치이다. 역시 퀘허의 학생이었던 로스(O. Loos)는 유계 동질 원형 영역과 유한차원의 PHJTS과 일대일 대응이 있다는 것을 밝혔다. 그리고, 유한차원의 PHJTS의 리스트는 표1과 같다. 유계 대칭 영역을 결정하는 불변량 (a, b, r)중에서, $b=0$인 경우가 바로 튜브 형의 유계 대칭 영역인데, 앞에서 언급한 대로 모두 5가지 형태가 있다.

4. 참고문헌

복소함수론을 연구하는 필자는 수년 전, Lie ball의 버그만 핵 함수(Bergman kernel function)에 관심을 갖게 되면서 요르단 대수를 공부하게 되었다. 더 자세한 설명 대신에, 참고문헌들을 소개하면서 글을 마치고자 한다.

(1) J. Faraut and A. Koranyi, Analysis on symmetric cones - 대칭원뿔에 대한 성질과 튜브 형의 유계 대칭 영역에서의 해석학을 공부할 수 있다.

(2) G. Roos, Analysis and geometry on complex homogeneous domains - 마지막 100여 페이지에 요르단 삼중계의 모든 것을 볼 수 있다.

(3) L. K. Hua, Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains - 유계 대칭 영역의 자기동형군, 버그만 핵 함수를 공부할 수 있는데, 요르단 대수보다는 행렬 계산에 의존하였다.

(4) M. Koecher, The Minnesota notes on Jordan algebras and their applications

(5) K. McCrimmon, A taste of Jordan algebras.

6) $L(z, z)=(\|z\|^2+\sqrt{\|z\|^4-|\Sigma z^2|^2})^{1/2}$이고, 이 때의 유계 대칭 영역은 Lie ball이라고도 부른다.

7) 두 경우 모두 Freudenthal 곱을 이용하여 쓸 수 있는데, 너무 복잡하여 생략한다. 자세한 식은 Wang, An; Yin, Weiping; Zhang, Liyou; Roos, Guy, The Kähler-Einstein metric for some Hartogs domains over symmetric domains. Sci. China Ser. A(2006)에서 찾아볼 수 있다.