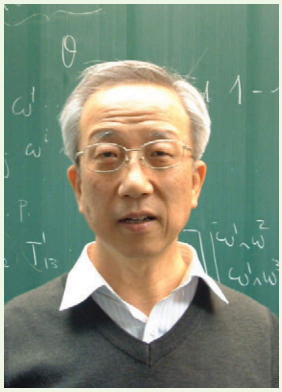
CR 기하란 무엇인가



글 _ 한종규
서울대학교 자연과학대학 수리과학부 교수

CR 기하는 경계를 가진 복소다양체의 경계면의 기하이다. 마치 검은 비닐봉지에 여러 개의 과일을 담았을 때 비닐봉지의 겉모양만을 보고 그 안에 배가 몇 개, 사과가 몇 개 있는지 알고자하는 경우처럼, 경계면의 기하로부터 경계면이 둘러싸고 있는 복소다양체의 함수론적인 성질을 규명하는 것이 CR 기하의 일차적인 목적이다. 국소적으로 말하자면 CR 기하는 복소다양체의 실초곡면의 기하이다. 'CR' 은 코시–리만의 첫 글자를 딴 것이다. 복소변수의 개수가 2이상인 경우 코시–리만 방정식은 과결정, 즉, 미지수의 개수보다 방정식의 개수가 더 많은 방정식이다. CR 기하는 과결정성에서 오는 수학적 현상인 국소적 불변량의 존재와 이와 관련하여 연립편미분방정식의 가해성, 외미분계의 대합성(involutivity)에 대한 새로운 관점과 통찰을 제공해 주는 등의 이유로 복소함수론과 무관하게 그 자체로 흥미의 대상이 되기도 한다.

일반적으로 미분다양체에 부여된 기하적 구조를 이해하는 해석학적인 접근방법은 불변미분작용소의 해의 존재와 그 성질을 연구하는 것이다. 코시–리만작용소 $\bar{\partial}$(d–bar라 읽는다) 는 복소다양체의 불변미분작용소이다. 복소다양체는 불변미분작용소가 곧 기하적 구조를 정의하는 경우인데 복소다양체란 코시–리만 방정식이 정의된 다양체를 의미한다. 코시–리만 방정식의 해, 즉, $\bar{\partial}u=0$의 해 u를 정칙함수라 부른다. 그러면 복소다양체

의 경계면에서는 어떤 함수가 내부의 정칙함수의 경계치가 될 수 있는가? 경계면의 복소함수 u가 내부의 정칙함수의 경계치가 되기 위하여는 우선 $\bar{\partial}u=0$의 경계면에 접하는 성분 $\bar{\partial}_b u$가 0이 되어야 한다. 이를 접 코시–리만 방정식이라 부른다. CR 다양체란 접 코시–리만 작용소 $\bar{\partial}_b$(d–bar b라 읽는다)를 불변미분작용소로 갖는 미분다양체이다. 이 글에서는 편의상 모든 다양체와 함수가 매끈한 (C^∞) 범주에 속한다고 가정하겠다.

접 코시–리만 작용소를 복소벡터장으로도 표현할 수 있다. 복소좌표계로 표현하여 코시–리만 연산자 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$, $j=1, \cdots, n$, 의 일차결합으로 표현되는 미분연산자 L이 주어진 부분실다양체에 접하면 이를 접 코시–리만 작용소라 부르고 이들 복소벡터의 집합 $\mho$은 복소화된 접벡터다발 $C\otimes TM$의 부분다발이며 다음과 같은 성질을 갖는다:

(1) $[\mho, \mho] \subset \mho$ (integrability 조건)

(2) $\mho \cap \bar{\mho} = \{0\}$.

추상적 CR 다양체란 실부분다양체 M의 접 코시–리만 작용소가 갖는 이같은 성질을 갖는 다양체를 말한다. 즉

정의 (초곡면형의 CR 구조): M이 $2n+1$차원 ($n \geq 1$) 실다양체이고 M의 복소화된 접벡터다발 $C\otimes TM$의 계수 n의 부분다발 $\mho$가 존재하여 (1)−(2)를 만족하면 $\mho$를 M의 CR 구조 (혹은 초곡면형의 CR 구조)라 부른다. CR 다양체 $(M, \mho)$에서 정의된 미분가능한 복소함수 u가 CR 함수라 함은 $\mho$의 임의의 절단 L에 대하여 (2)를 만족함을 의미한다.

CR 기하학의 초기역사

실초곡면의 CR 구조와 접 코시–리만 방정식이란 개념은 20세기 초 다변수복소함수론이 태동될 때 함께 태어나게 되었다. CR이란 개념이 형성되고 이론이 발전하게 된 것은 다음 세 가지 수학적인 발견에 기인한다.

첫째, 하르톡스 확장현상의 발견 (1906년),

둘째, 실초곡면에는 정칙변환에 대한 국소불변량이 존재하며 경계면의 국소불변량을 비교함으로 복소영역의 정칙동형 여부를 판정할 수 있다는 포앙카레의 관찰 (1907년),

셋째, CR 함수의 확장가능성과 접 코시-리만 방정식의 불가해성에 관한 레위의 일련의 관찰 (1956~57)

등이 그것이다. 이 세 가지를 차례로 살펴보겠다.

하르톡스는 다음 사실을 관찰하였다: C^N, $N\geq 2$,의 환형영역, 예컨대, C^2에서 반지름 1인 열린 공 $|z_1|^2+|z_2|^2<1$을 Ω_1이라 하고 반지름 1/2인 동심의 공을 Ω_2라 할 때 $\Omega_1-\Omega_2$의 정칙함수는 자동적으로 Ω_1 전체로 확장된다(하르톡스의 확장현상). 이 발견으로부터 더 이상 확장할 수 없는 영역고유의 함수를 갖는 영역임을 의미하는 정칙대역이란 개념이 나오게 되었다. 볼록영역은 정칙대역이다. 볼록영역과 정칙동형

인 영역도 역시 정칙대역이다. 여기서 여러 가지 의사볼록 영역이란 개념이 나오게 되었다. 20세기 초부터 1960년대까지 정칙대역을 기하적으로 규명하고자 하는 소위 레비문제, 즉, 정칙대역 개념과 의사볼록 개념은 동치인가 하는 문제를 축으로 하여 다변수복소함수론 이론이 발전하게 되었다. 영역의 경계면이 매끄러운 경우는 하르톡스 확장현상과 레비 문제는 전적으로 경계면의 CR 구조에 관한 문제가 된다. 이 얘기를 하기 앞서 추상CR 다양체 $(M, \mho)$의 레비 형식을 정의하자. 복소벡터 $L \in \mho$ 을 실수부분과 허수부분으로 나누어 $L = X + iY$라 쓸 때 X와 Y들의 집합은 실접벡터 다발 TM의 계수 $2n$ 부분다발 $H(M)$을 이룬다. 이제 선다발 $H(M)^{\perp} \subset T^{*}M$의 임의의 절단 θ를 선택하여 $\mho$ 위에 에르미트 2차형식인 레비형식 $\mathcal{L}$를 아래와 같이 정의한다.

$\mathcal{L}(L_1, L_2) = d\theta([L_1, \bar{L}_2])$ 단 L_1과 L_2는 $\mho$의 절단.

특별히 M이 C^{n+1}에서 실함수 ρ의 영점집합으로 정의된 실초곡면일 경우에는 $\theta = i\partial\rho$이고 따라서 레비형식은 $i\bar{\partial}\partial\rho$이다. 레비 형식의 고유치가 모두 0 이상일 때 CR 구조는 레비–의사볼록(Levi pseudo-convex), 고유치가 모두 양일 때 강의사볼록이라 말한다. 강의사볼록인 경우를 포함해서 레비형식이 비퇴화인 경우, 즉 고유치가 어느 것도 0이 아닐 때 $\theta \wedge (d\theta)^n \neq 0$ 이므로 θ는 접촉형식이다. 강의사볼록일 필요충분 조건은 양방정칙사상으로 강 볼록하게 변형시킬 수 있다는 것이다. 레비 형식의 고유치가 항등적으로 영인 경우 CR 다양체는 평평하다(flat)고 말한다. 실초곡면의 레비 형식은 리만 기하에서 초곡면의 2차근본형식에 해당하는 개념이다. 이제 매끈한 경계면을 갖는 $C^{n+1}(n \geq 1)$의 유계영역 Ω에 대하여는 다음 두 정리가 성립한다.

첫째, 하르톡스 확장 현상: $\bar{\Omega}$의 여집합이 연결되어 있으면 Ω의 경계면에서 정의된 CR 함수는 Ω 내부의 정칙함수로 확장된다.

둘째, 레비 문제의 해답: Ω가 정칙대역일 필요충분 조건은 경계면이 의사볼록 하다는 것이다.

1960년대에 발달된 $\bar{\partial}$ 이론의 관점에서 저술한 훼르만더의 다변수복소함수론 교과서 (1966년 초판 발행)에 위의 두 정리가 서술되어 있다. 경계면의 기하와 레비문제를 최초로 연구한 레비는 하르톡스와 함께 다변수복소함수론의 태동기에 활동한 사람이다. 피사 대학을 졸업하고 제노바 대학의 교수가 되었으나 1차 세계대전에 참전하여 34세의 나이에 아깝게도 전사하고 말았다.

CR 기하를 태동하게 한 또 하나의 흐름은 리만사상정리 (1851년)를 다변수로 얼마나 확장할 수 있겠는가 하는 문제이었다. 포앙카레는 C^2의 단위구 $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$의 정칙자기동형군과 단위원의 데카르트 곱 (polydisc) $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$의 정칙자기동형군을 각각 구하고 이 두 군이 동형이 아님을 보임으로 두 영역 사이에 양방정칙사상이 존재할 수 없음을 보였다. 그는 또한 매끄러운 경계면을 갖는 두 영역사이에 양방정칙사상이 만일 존재한다면 경계면까지 C^∞일 것이라 추측하였다. 이 추측은 아직 특수한 경우 밖에 증명되지 못하고 있다. 이 추측이 참이라면 리만 사상정리의 다변수로의 확장문제, 혹은 영역의 분류문제는 초곡면 사이의 CR 동형여부를 묻는 문

제로 귀착된다. 포앙카레는 또한 초곡면에는 양방정칙사상에 관한 국소적불변량이 존재한다는 사실을 처음으로 언급하였다. 프린스턴 대학 교수 찰스 페퍼만은 강의사볼록인 경우의 포앙카레 추측, 즉, 강의사볼록영역 사이의 정칙동형사상은 경계면까지의 미분가능하다는 사실을 증명하여 1974년 필즈상을 수상하였다.

복소변수 계수를 가진 선형 연립 편미분 방정식으로서의 접 코시–리만 방정식에 관한 연구는 유명한 레위작용소가 소개된 이후, 20세기 후반에 활기를 띄었다. 레위 작용소란 3변수의 공간 $\{(x, y, t)\}=R^3$에 정의된 1계 선형 편미분 연산자

$$(3)\quad L=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\ 2i(x+iy)\frac{\partial}{\partial t}$$

인데 레위는 1957년에 애널스에 발표한 4쪽 짜리 짤막한 논문에서 $Lu=f(t)$가 원점의 부근에서 해를 가지면 f는 해석적이어야 한다는 기묘한 관찰을 발표하였다. L은 C^2의 구면 S^3상의 접 코시–리만 작용소를 국소좌표로 표현한 것인데 이는 1변수 복소함수론의 기본정리 중 하나인 슈바르츠 반사원리: 상반면에서 정칙인 함수가 실축까지 연속이고 실축에서 실수값을 가지면 실축너머로 정칙 확장된다는 정리를 이용하여 $f(t)$가 해석적임을 보였다. 따라서 해석적이 아닌 우변에 대하여는 이 단순한 1계 선형 편미방 (3)은 해를 갖지 못하며 초함수 범주에서도 해를 갖지 못한다. 레위는 이 논문을 위시하여 접 코시–리만 방정식에 관한 일련의 논문을 발표하였는데 그 후 지금까지 활발히 연구되고 있는 CR 함수의 정칙확장문제, 편미분 방정식의 가해성 문제에 관한 논문들의 효시가 되었다.

이상 개략적으로 살펴본 바와 같이 접 코시-리만 방정식, CR 함수 등의 아이디어는 20세기 초부터 알려져 있었지만 '접 코시–리만 콤플렉스($\overline{\partial}_b$ complex)' 는 1965년 콘과 로시가, 'CR' 이란 말은 1968년 S.그린필드가 처음으로 사용하여 그 후에 널리 통용되고 있다.

국소적 CR 불변량

다양체의 기하학은 국소적 불변량을 규명하는 국소적 기하가 존재하는 경우와 국소적 불변량이 존재하지 않는 경우로 대별된다. 리만 다양체에는 곡률텐서가 국소적 불변량이다. 복소다양체는 국소적으로 C^n과 같으므로 국소적 불변량은 존재하지 않는다. 국소적 기하가 존재하는 기하는 리만기하, 등각기하, CR 기하 등이다. 기하적 구조를 가진 미분다양체의 국소적 불변량을 논하기 위하여는 먼저 하나의 국소적 변환군과 이 군이 작용하는 기하적 대상의 집합을 설정해야 한다. CR 구조로 돌아가서 지금부터는 레비형식이 비퇴화된 경우만을 논의하기로 하자.

CR 구조의 국소적 불변량 중에서 가장 기본적인 것은 레비 형식의 부호수(signature)이다. C^{n+1} 혹은 $n+1$ 차원 복소다양체의 실초곡면 M^{2n+1}과 관련하여 다음 세 가지 국소변환군을 생각할 수 있다. 첫째 CR 변환군 G_{CR}은 M의 CR 동형사상들의 집합, 의사

등각변환군 G_{PC}는 M의 열린근방의 양방정칙사상으로 M을 M으로 보내는 사상들의 집합, 그리고 의사 에르미트군 G_{PH}는 M의 특정한 접촉형식 θ를 보존하는 CR 동형사상들의 집합이다. 이들 사이의 포함관계는

$G_{PC} \subset G_{CR}$, 그리고 $G_{PH} \subset G_{CR}$

이며 레비형식이 음과 양의 고유치를 모두 가질 때는 G_{CR}과 G_{PC}는 같다.

G_{PC}에 관한 불변량을 의사 등각 불변량, G_{CR}에 관한 불변량을 CR 불변량, G_{PH}에 관한 불변량을 의사 에르미트 불변량이라 부른다. 불변량의 집합들의 포함관계는 아래와 같다:

{CR 불변량}⊂{의사 등각 불변량}, 그리고 {CR 불변량}⊂{의사 에르미트 불변량}.

레비형식이 양과 음의 고유치를 모두 갖는 경우에는 CR 불변량과 의사 등각 불변량은 같다. '의사 등각' 이란 말은 카르탄 (E. Cartan)이 1932년 논문에서 처음 사용하였다. 1907년 경에 포앙카레는 해석적인 초곡면의 경우 의사 등각 불변량이 존재한다는 사실을 다음과 같이 설명하였다.

"복소2변수의 공간 C^2의 하나의 초곡면은 국소적으로 3개의 실변수에 관한 하나의 실함수의 그래프이고 양방정칙사상은 2개의 복소변수에 관한 2개의 복소함수로 주어진다. 이제 각 경우에 수렴하는 멱급수의 집합을 생각하면 m계 이하의 미분계수는 3변수의 실함수 쪽이 m의 값이 커질 때 2개의 복소함수의 경우보다 훨씬 더 많아진다. 그러므로 실초곡면의 정의함수의 미분으로 표현되는 어떤 불변량이 존재해야 한다."

이것을 흔히 포앙카레의 설명(heuristic)이라 부르는데 이 설명을 듣고 나서도 그의 아이디어가 무엇인지 정확히 알기는 어려운 것 같다.

카르탄의 동치방법과 타나카-천-모저 이론

20세기 초에 카르탄은 19세기 후반의 수학의 두 개의 큰 흐름, 즉 가우스-리만의 내재적기하와 클라인-리의 연속군 이론을 결합하는 진일보된 이론을 창안하였다. 카르탄은 다양체에 작용하는 변환군이 아니라 움직이는 틀(moving frame)에 작용하는 변환군을 생각하였다. G-구조의 동치방법이 그것인데, 이 이론에서 종래의 여러 가지 국소적 불변량이란 개념이 구체적인 함수 혹은 텐서마당(tensor field)이란 계산가능한 형태로 다시 태어나게 되었다. G를 $n\times n$행렬군의 닫힌 부분군이라 하자. 다양체 M^n 위에 틀마당(frame field)이란 n개의 독립인 벡터마당의 집합 $e=(e_1, \cdots, e_n)$을 말한다. M 위의 G-구조란 틀마당 전체의 다발 $F(M)\to M$의 부분다발로 군 G의 작용에 관한 동치관계에 있는 틀마당들의 집합이다. 즉, 두 개의 틀마당 e와 $\acute{e}$이 G작용에 관해 동치라 함은 $\acute{e}=ge$인 $g\in G$가 존재함을 말한다. 예컨대, 리만 구조란 직교행렬군 $O(n)$ 구조이고 M^{2n} 위의 준복소구조는 $2n\times 2n$행렬로 본 복소 $n\times n$ 가역행렬들의 군 $GL(n, C)$구조이다. 리만 다양체에 국소 불변량이 존재하는 것은 전적으로 $O(n)$이 유한형이란 사실, 군의 구조 때문이다. 벡터마당의 미분을 다룰 때는 벡터마당 대신 그

것의 쌍대적 개념인 미분형식을 사용하는 것이 계산상 절대로 유리하다는 사실은 카르탄보다 한세대 전 프로베니우스(Frobenius) 시대에 이미 알려져 있었다. 카르탄도 G-구조이론을 전개할 때 벡터마당 대신 미분형식을 사용하였다.

다양체 M^n 위에 독립인 n개의 1차 형식 $\theta=(\theta^1, \cdots, \theta^n)^t$들이 이루는 틀다발의 부분다발 $\pi: P\to M$이 있어서 각각의 fibre $\pi^{-1}(x)$은 어느 하나의 틀 $\theta\in P$에 대한 군작용궤적 $G(\theta)$와 같을 때 이 부분 틀다발 P를 M 위의 하나의 G-구조라 부른다. 같은 n차원의 두 다양체 M과 M'에 각각 P와 P' 이란 G-구조가 있다고 하자. 이제 P의 절단인 틀마당 θ와 M'의 절단 θ'을 선택하자. 사상 $f: M\to M'$ 이 G-구조의 동치사상이라 함은

$F^*\theta'=g\theta$, 단 $g: M\to G$는 미분가능한 사상,

을 만족하는 g가 존재함을 의미한다. 예를 들면 두 리만 다양체 M^n과 M^n 사이에 등장사상이 존재하겠는가 하는 문제가 $O(n)$-구조의 동치문제이다. 카르탄은 그의 접속(connection)이론을 이용하여 동치문제에 접근하고 있다. 이제 다양체 (M, G) 위의 틀마당 (P의 단절) θ를 생각하자. M상의 한 점에서 모든 가능한 틀마당은 군G를 작용하여 얻는 것이다. G의 단위원소에서의 미소변화, 즉, G의 리–대수를 g라 하면

$d\theta=-\omega\wedge\theta$

를 만족하도록 g 값을 갖는 일차형식 ω를 미리 정해놓은 표준적인 방법으로 유일하게 구할 수 있다고 가정하자. 리만구조인 경우에 ω는 추가적인 조건 없이 유일하게 결정된다 (레비–치비타 접속). 군이 너무 작으면 ω는 존재하지 않는다. ω를 G-구조의 접속이라 부른다. 접속 ω는 다발 P수준으로 다음과 같이 올려진다.

P는 국소적으로 $M\times G$와 같다. 임의의 점 $(x, g)\in M\times G$에서 일차형식

$\Theta(x, g):=g\theta(x)$

을 미분하면 $d\Theta=dg\wedge\theta+gd\theta$이고 이로부터 얻은 $\theta=g^{-1}\Theta$와 위에서 얻은 $d\theta$를 여기에 대입하면

$d\Theta=(dgg^{-1}-g\omega g^{-1})\wedge\Theta$

을 얻는다. 괄호 안의 양

$\Omega:=dgg^{-1}-g\omega g^{-1}$

은 리-대수 g값을 가진다. 이제 (Θ, Ω)는 p의 틀마당이 된다.

카르탄은 다음과 같이 동치문제에 접근하였다. M과 M'상에 각각 주어진 틀마당 θ, θ'에 대하여 $F^*\theta'=g\theta$을 만족하는 사상 F가 존재한다면 다음 도식과 같이 $F: M\to M'$은 틀다발 수준의 사상 $\Phi: P\to P'$ 로 올려진다:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Phi} & P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{F} & M' \end{array}$$

뿐만 아니라 (Θ', Ω')을 위와 같이 유일하게 결정된 P의 틀마당이라 하면 위로 올려진 사상 Φ는 이들 틀마당을 보존한다, 즉

$\Phi^*\Theta'=\Theta$, 그리고 $\Phi^*\Omega'=\Omega$이 된다.

이 방정식의 해 Φ는 $\Phi(0)=0$라는 한 점에서의 정보로 완전히 결정된다. 이것이 {e}-구조의 동치문제이다. 카르탄의 동치방법은 G-구조의 문제를 {e}-구조의 문제로 환원시키는 과정을 말한다. (θ, Ω) 를 불변량의 완비계라 부른다.

1932년 카르탄은 C^2의 실초곡면의 의사등각 불변량의 완비계를 상술한 바와 같은 그 자신의 동치방법을 적용하여 계산하였다. 일반적인 차원 C^{n+1}, $n\geq 1$의 실초곡면에 관한 의사등각 불변량은 1960년대 타나카가 특별한 가정하에 계산하였다. 가장 일반적인 결과는 비퇴화된 레비 형식을 갖는 CR 구조의 CR 불변량의 완비계를 계산하여 1974년 Acta Math. 에 출판된 천-모저의 논문이다. 이 논문 역시 카르탄의 움직이는 틀과 동치방법을 사용한 것이었다. 추상적 CR 다양체 M^{2n+1}의 CR 구조에 부합하는 틀마당은

$(\theta, \theta^1, \cdots, \theta^n, \overline{\theta^1}, \cdots, \overline{\theta^n})$, 여기서 θ는 실1차형식, θ^j, $\overline{\theta^j}$, $j=1, \cdots, n$은 복소1형식, 꼴이고 여기 작용하는 군 G는

$$\begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ * & A & 0 \\ \overline{*} & 0 & \overline{A} \end{bmatrix}$$, 단 u 는 실수, $*$ 는 복소 n-벡터, $A\in GL(n, C)$,

꼴의 행렬들의 집합이다. 그러나 이 G-구조에 관하여는 접속, 즉, 불변량의 완비계 (Θ, Ω)를 계산할 수가 없다. CR 구조에 관하여는 접촉형식 θ대신 $u\theta$, $u>0$, 를 선택하여도 무방하므로 선다발 $\{u\theta\}:=E\rightarrow M$에서 카르탄의 동치방법을 적용한다. 선다발 E 위에서 틀마당 ω, ω^α, $\overline{\omega}^\alpha$, $\alpha=1,\cdots,n$, 을 적절히 선택하여

$$d\omega = i g_{\alpha\bar{\beta}}\,\omega^\alpha \wedge \overline{\omega}^\beta + \omega\wedge\phi$$

(단 ω, ϕ 는 실1차형식, ω^α는 복소1차형식, $g_{\alpha\bar{\beta}}$는 상수로 레비형식과 같은 부호수)를 만족하게 할 수 있다. 이를 만족하는 E의 틀마당 전체의 집합을 Y라 두자. 레비형식의 부호수를 (p, q)라 하면 이때 틀에 작용하는 군 G_1은 $SU(p+1, q+1)$을 유한 정규부분군으로 나눈 몫군의 부분군이다. 이 G_1 구조 $Y\rightarrow E$에 대한 불변량의 완비계를 카르탄의 동치방법론으로 계산한 것이 천-모저의 논문의 골자이다.

이상으로 CR 기하 전반을, 특히 국소적 불변량을 중심으로 개괄하여 보았다. 이 밖에도 국소적 CR 불변량을 버그만 핵함수의 점근전개식으로부터 계산하는 페퍼만-히라치의 접근방법과 대역적 CR 불변량에 관한 번즈-엡스타인의 연구 등, 주요한 부분들이 있지만 지면상 생략하였다. CR 기하는 CR 다양체 너머, 더 넓은 세계로 연결되어 있다. CR 기하는 기하적구조 및 미방의 동치문제, 과결정 편미방의 가해성 문제, 날에서 쐐기로(edge of the wedge) 로 확장가능성 등 여러 가지 서로 다른, 더 일반적인, 수학적 현상과 연결되어 있다.

Profile

한종규 교수 현재 서울대학교 수리과학부 교수이다. 서울대학교 수학과를 졸업하고 미국 미시간 대학에서 수학 박사 학위 취득 후 미국 콜럼비아 대학과 텍사스텍 조교수, 포항공대 부교수를 역임하였다. 현재 다변수복소함수론, CR기하학, 외미분계, 과결정편미분방정식에 대한 연구를 수행하고 있다.