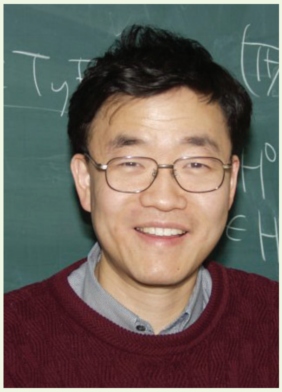
# 복소 기하학이란?



글 _ **황준묵**
고등과학원 수학부 교수

**복소 기하학이란 말은** 영어로 complex geometry를 번역한 것이다. 수학의 연구 분야를 이야기할 때 미국 수학회의 수학 분야 분류(AMS Mathematical Subject Classification: www.ams.org/msc)가 국제적으로 널리 쓰이는데, 수학의 여러 분야를 수학사에서 수학교육에 이르기까지 번호를 붙여서 97개의 대(大)분야로 분류하고, 각 대분야를 10-20여 개의 중(中)분야로 그리고 각 중분야를 또 20여 개까지의 소(小)분야로 분류하고 있다. 복소 기하학은 이 분류에서 32번 대분야인 Several complex variables and analytic spaces에 해당한다. 복소 기하학을 소개하기 위해서는 이 두 가지 개념-즉 다변수 복소 함수론(several complex variables)과 해석적 공간(analytic spaces)-을 설명하고, 무엇 보다도 왜 이 두 가지가 하나의 분야로 묶여서 분류되는가를 설명하면 될 것 같다.

우선 다변수 복소 함수론이란 무엇인가? 이공계를 전공한 많은 분들이 대학에서 복소 해석학이라는 과목을 배웠을 것으로 생각되는데, 학부 복소 해석학에서 배우는 것이 일변수 복소 함수론의 고전적 이론이다. 일변수 복소 함수론을 다변수로 확장한 것이 다변수 복소 함수론이다. 그런데 미국 수학회의 수학 분야 분류를 보면 30번에 일변수 복소 함수론(Functions of a complex variable)이 있어서 다변수 복소 함수론과 별개의 대분

야로 구분되고 있다. 참고로 실 함수론(Real Functions)은 26번 하나의 대분야가 있고 그 안에 중분야로 일변수 함수론과 다변수 함수론이 들어 있다. 즉 실 함수의 연구에서는 일변수이냐 다변수이냐가 어느 정도 차이는 있지만 크게 보면 하나의 이론에 속한다고 할 수 있고 많은 사람들이 두 가지 모두를 연구하고 있다는 뜻이다. 그런데 복소 함수론에서는 왜 일변수 복소 함수론과 다변수 복소 함수론을 완전히 다른 두 개의 대분야로 구분하는 것일까? 그 이유는 다변수 복소 함수론에서는 일변수 복소 함수론과는 전혀 다른 현상이 너무나 많이 등장하여 다변수 복소 함수론의 근본 문제나 기본적 방법론이 일변수 복소 함수론과는 판이하게 다르기 때문이다. 역으로 말하면 일변수 함수론의 상당 부분은 다변수로 확장할 수 없다는 말이기도 하다. 그래서 다변수 복소 함수론은 일변수 함수론의 일반화로 보기 보다는 다음에 얘기할 해석 공간의 기하학 연구와 더불어 연구되는 측면이 더 강하다. 일변수 복소 함수론과 다변수 복소 함수론의 큰 차이점 하나만 들어보자면, 정칙함수 (holomorphic functions)와 조화함수 (harmonic functions)의 관계를 들 수 있다. 정칙함수란 일변수에서든 다변수에서든, 함수가 정의된 점 근처에서 복소 변수의 멱급수(power series)로 나타낼 수 있는 함수를 말한다. 조화함수란 고전 물리에서 등장하는 개념으로 라플라시안 방정식을 만족시키는 실함수를 말한다. 뉴톤 역학에서 중력장의 포텐샬 함수가 이에 해당한다. 대학교 복소 해석학에서 나오듯이 일변수 복소 함수론에서는 복소 변수 $z=x+iy$를 두 개의 실 변수로 보았을 때 정칙함수의 실수 값 (real part)을 취하면 실 함수로서 조화함수가 된다. 거꾸로 복소 평면에 조화함수가 하나 주어지면 그 것을 실수 값으로 갖는 정칙함수를 만들어 낼 수 있다. 이 사실은 일변수 복소 함수론에서 매우 중요한 역할을 하며 많은 이론의 근간이 된다. 다변수 복소 함수론에서도 정칙함수의 실수 값을 취하면 조화함수가 된다. 하지만 그 역이 성립하지는 않는다. 즉 다변수에서는 조화함수 가운데 아주 특수한 것들만이 정칙함수의 실수 값이 되는 것이다. 그리고 어떤 조화함수가 정칙함수의 실수 값이 되는지는 라플라시안 방정식과 같은 실 변수 함수의 개념만으로는 설명할 수 없다. 따라서 조화함수로부터 정칙함수를 만들어

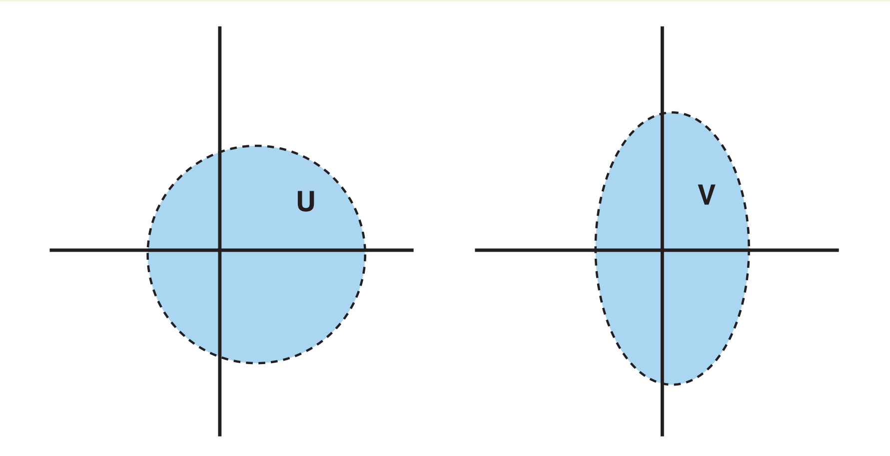



그림 1

내는 방법이 다변수 복소 함수론에서는 아주 제한되어 있다. 이로 인해 다변수 복소 함수론에서는 정칙함수를 만들어내기가 어렵고, 일변수에서 등장하는 정칙함수 중 다변수에서는 그에 해당하는 것이 없는 경우가 생긴다. 이 점이 다변수 복소 함수론에서 매우 심각한 문제 거리로 나타나는 경우가 많다. 하나의 예를 들면 일변수 복소 평면에 그림 1과 같은 영역 U를 생각하자.

U를 살짝 찌그러뜨려서 영역 V로 변형시켰을 때, U에 정의된 정칙함수들의 성질과 V에 정의된 정칙함수들의 성질은 근본적으로 동일하다. 엄밀히 말하자면 U를 V로 바꿔주는 정칙사상(holomorphic map)이 존재한다. 다시 말해서 U와 V는 일변수 복소 함수론의 입장에서 보면 차이가 없다. 반면 다변수, 이를테면 복소 2 변수 공간에서 그림 2의 영역 U와 U를 살짝 찌그러뜨린 영역 V를 생각하면  일반적으로 U에 정의된 정칙함수들과 V에 정의된 정칙함수들은 전혀 다른 성질을 갖게 된다. U를 V로 보내는 정칙사상이 없기 때문인데, 다시 말해서 U 와 V는  다변수 복소 함수론의 입장에서 전혀 다른 대상이라는 뜻이다. 일변수에서는 존재하는 정칙사상이 비슷한 상황의 다변수에서는 존재하지 않는 근본 원인은 위에 언급한 정칙함수와 조화함수의 관계에 있다.

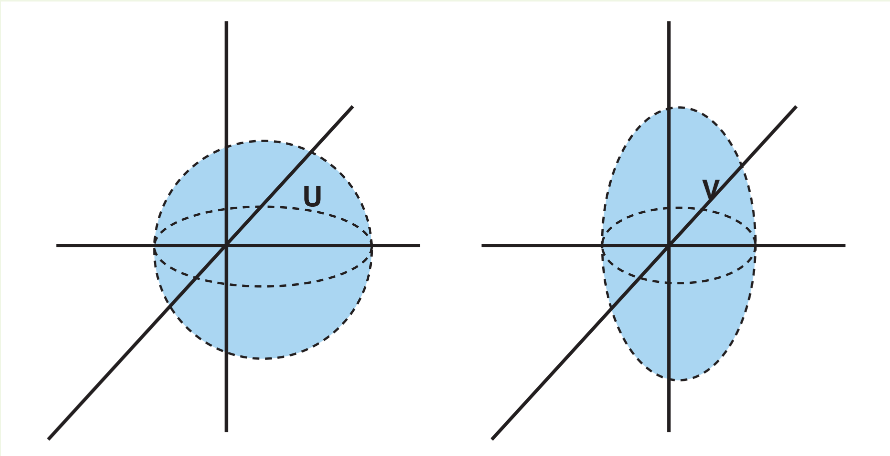


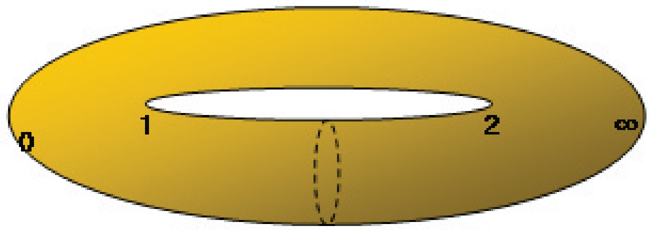

그림 2

이 정도로 다변수 복소 함수론이 일변수 복소 함수론과 큰 차이가 난다는 것을 어느 정도 납득하셨을 것으로 믿고, 다음은 해석적 공간 (analytic space)을 설명하고자 한다. 공간이라면 어떤 기하학적 대상을 말하는데 그러면 왜 다변수 복소 해석학은 이런 공간의 연구와 하나의 분야로 연결되어 있는 것일까?

이 점을 이해하기 위해서 일변수 복소 함수론을 다시 들여다 보자. 18세기 말에서 19세기 초를 거치면서 수학에서 일어난 큰 변화 중의 하나는 복소수가 광범위하게 쓰이기 시작했다는 점이다. 이런 과정에서 자연스럽게 복소 함수론이 발달되었고 그 때까지 실 함수에 대해 연구된 많은 이론-예를 들어 함수의 사칙연산, 다항식, 유리식, 제곱근 등의 대수적 연산, 그리고 미적분 등-이 복소 함수로 확장되었다. 이 중에는 그냥

쉽게 x라는 실 변수를 $z=x+iy$ 라는 복소 변수로 바꿔주기만 하면 되는 것들도 있지만, 실 함수에서는 없었거나, 그 다지 중요해 보이지 않던 것이 중요한 문제로 등장하는 것도 있었다. 가장 대표적인 것이 제곱근 함수 $\sqrt{z}$ 이다. 실 함수에서 x의 제곱근 $\pm\sqrt{x}$는 서로 다른 두 가지 함수 $\sqrt{x}$와 $-\sqrt{x}$를 함께 생각하는 것으로 그다지 복잡할 것이 없는 함수이다. 마찬가지로 하나의 복소수 z에 대해서 그의 제곱근 $\sqrt{z}$는 두 가지 복소수 값을 가질 수 있는데, 복소수는 부호가 없으므로 어느 쪽이 양이고 어느 쪽이 음인지를 말하는 것은 무의미 하나, 어쨌든 그냥 서로 다른 두 가지 값을 함께 생각하면 그만이다. 그런데 문제는 $\sqrt{z}$를 함수로 생각했을 때 등장한다. 함수로 생각한다는 것은 변수 z를 변화시켜 가면서 그 값이 어떻게 변하는 지를 보겠다는 것이다. 이때 $z=\cos t+i\sin t$ 를 취하여 실수값 t를 변화시킬 때, $t=0$에서의 $\sqrt{z}$값으로 1을 택한 후 $\sqrt{z}$ 값이 변하는 것을 따라가 보면 $t=2\pi$에서는 $\sqrt{z}$의 값이 -1이 된다. 그런데 $t=0$ 이나 $t=2\pi$나 동일한 $z=1$을 나타낸다. 즉 $\sqrt{z}$의 한 가지 값에서 시작하여 서서히 z를 변화시켜 다시 시작한 곳으로 돌아왔을 때, 이 함수는 $\sqrt{z}$의 다른 값을 가지게 된다. 말하자면 $\sqrt{z}$는 두 개의 다른 함수가 아니라 두 가지 값을 가지는 하나의 함수로 볼 수 밖에 없다는 것이다! 이러한 현상은 여러 가지 계산을 할 때 상당한 혼란을 초래할 수 있다. 이 문제를 피하기 위해서 흔히 복소 함수론의 입문 과정에서는 branch cut이라는 매우 인위적인 도구를 도입하여 $\sqrt{z}$와 같은 함수는 변수 값을 어떤 범위 밖으로 변화시키는 것은 허락하지 말아야 한다고 가르치기도 한다. 이런 관점은 사실 19세기까지 널리 퍼져있던 것으로, 복소 함수론의 함수는 이와 같이 변수가 취하는 값에 어떤 인위적인 제한을 해야만 대수적 연산에 문제가 없어진다는 것이 일반적인 관점이었다. 문제는 이런 식으로 계속했을 때 여러 가지 함수의 조합을 생각하기 시작하면 branch cut이 수도 없이 복잡하게 얽히고 설키게 되고 변수가 취하는 값은 갈수록 제한되게 되어 함수론이 실 변수와는 비교가 안되게 복잡해진다는 데 있다. 이를테면 $\sqrt{z(z-1)(z-2)}$와 같은 함수는 branch cut을 두 개 잡아줘야 하는데 예를 들어 선분 [0,1] 과 반직선 [2, ∞] 를 잡을 수 있다. 물론 선분 [1,2]와 반직선 [$-\infty$, 0]을 잡아도 된다. 뿐만 아니라 굳이 선분이나 직선이 아니라 휘어진 곡선을 잡아도 그만이다. 결국 이 branch cut이라는 것은 지극히 인위적인 것으로 그 자체는 의미가 없으나 서로 다른 함수 값이 뒤섞이는 것을 막기 위해 도입해야만 하는 것이다. 이런 골치 아프고 무엇보다도 지저분한 과정을 완전히 제거한 것이 리만면(Riemann surface)이라는 개념이다. 19세기 중반 리만에 의해 도입된 이 개념은 오늘날 복소 다양체 (complex manifold)라는 개념의 효시라고 볼 수 있는데, 리만의 관점에 의하면 $\sqrt{z}$나 $\sqrt{z(z-1)(z-2)}$와 같은 함수는 복소 평면에 정의된 함수가 아니라 그 함수 각각의 특수한 리만면이라는 공간에 정의된 함수라는 것이다.

리만면이란 어떤 공간으로서 부분적으로는 복소 평면에 있는 영역처럼 생긴 공간을 말한다. 복소 다양체는 이것을 고차원으로 확장한 것이다. 함수를 복소 다양체에 정의된 것으로 보게 되면 branch cut과 같은 지저분한 제한이 없이도 모든 연산이 자




$\sqrt{z(z-1)(z-2)}$의 리만면

연스럽게 정의될 뿐 아니라, 함수의 많은 성질을 복소 다양체의 기하학적 성질을 통해서 자연스럽게 이해할 수 있다. 이와 같이 복소 변수 함수론은 그 기초에서부터 복소 다양체의 기하학과 깊숙이 관계되어 있으며, 이와 같은 현상은 다변수 복소 함수론으로 올라가면 그 정도가 더욱 심해진다. 따라서 많은 경우 복소 함수의 해석적 성질과 복소 다양체의 기하학적 성질을 함께 연구하게 되고 이것이 곧 복소 기하학이라고 부르게 된 연유이다. 복소 다양체에 특이점(singularity)과 보다 더 복잡한 복소 해석적 구조까지도 도입해서 일반화한 개념이 해석적 공간 (analytic space)이며 이 공간의 기하학 연구가 복소 기하학의 중요한 과제라고 할 수 있다. 이런 이유로 다변수 복소 함수론과 해석 공간은 하나의 대분야로 분류되게 된 것이다.

그러면 복소 기하학에는 구체적으로 어떤 연구 주제가 있는가? 위에 말한 수학 분야 분류에 보면 이 분야는 다음과 같이 19개의 중분야로 이루어져 있다. 각 중분야 별로 많게는 20여 개까지의 소분야가 있어서 전체적으로 복소 기하학에 속하는 작은 연구 분야가 100 가지가 넘으니 이들에 대해 설명한다는 것은 무리이고, 중분야 별로 간단한 아이디어를 설명하는 것으로 대신할까 한다.

- **32A Holomorphic functions of several complex variables:** 다변수 복소 함수의 해석학적 성질을 세밀하게 연구하는 분야이다. 즉 가장 간단한 종류의 영역, 복소 유크리드 공간이나 복소 공(ball)에 정의된 정칙함수의 여러 가지 성질을 연구하는데, 실 함수에서는 나타나지 않는 놀라운 성질들이 많다. 이를테면 함수 값이 어떻게 커가는 지를 연구하는 Nevanlinna theory의 경우 정수론의 Diophantine approximation과 신비스러운 관계가 있는 것으로 알려져 있다.
- **32B Local analytic geometry:** 다변수 복소 멱급수로 정의되는 국소적 함수들의 대수적, 기하학적, 해석학적 성질의 관계를 연구하는 분야이다.
- **32C Analytic spaces:** 해석적 공간이란 복소 다양체에 여러 가지 특이점 구조를 도입한 공간으로 쉽게 말해서 특이점 구조의 대역적 이론을 연구하는 분야이다.
- **32D Analytic continuation:** 앞에서 본 제곱근 함수의 성질에서와 같이 변수를 변화시켜서 대역적으로 함수에 어떤 일이 일어나는가를 연구하는 분야로서 복소 다

양체의 대역적 성질과 연관된다.

- **32E Holomorphic convexity:** 위에 예로 들었듯이 다변수 복소 함수론이 일변수와 특히 다른 점은 바로 영역의 함수론적 성질에 있다. 일변수에서는 영역의 위상적 성질에 의해 함수론적 성질이 결정되는 반면 다변수에서는 영역이 복소 해석적으로 볼록한가 하는 것이 함수론적으로 중요하다. 이러한 복소 해석적으로 볼록함(convexity)을 연구하는 분야이다.
- **32F Geometric convexity:** 볼록함을 기하학적으로 좀 더 세밀하게 연구하는 것으로 특히 함수론적 성질에 의해 정의되는 거리의 개념 등이 중요한 연구 과제가 되었다.
- **32G Deformations of analytic structures:** 복소 다양체 구조의 변형이라는 개념은 1차원에서 리만에 의해 연구된 것을 20세기 중반 코다이라와 스펜서가 임의의 차원으로 확장시켜 그 토대를 마련하였다. 그 후 이 이론은 대수기하학을 비롯한 거의 모든 기하학, 대수학에 지대한 영향을 미치면서 복소 기하의 가장 중요한 연구 주제 중 하나가 되었다.
- **32H Holomorphic mappings and correspondences:** 복소 다양체 사이의 정칙사상을 연구하는 분야이다. 특히 복소 다양체에서 자기 자신으로 가는 정칙사상의 연구는 복소 동력학계 (Complex dynamics)로 발전되었는데 동력학계 이론의 중요한 예로 자리잡고 있으며, 최근 들어 가장 활발히 연구되는 분야 중 하나이다.
- **32J Compact analytic spaces:** 해석적 공간(32C)이 닫힌 공간, 엄밀하게는 긴밀한(compact) 공간인 경우에는 이론이 훨씬 다양해지고 풍부해지며 따라서 많은 연구가 긴밀한 공간에 대해 이루어지고 있다. 이 분야는 대수기하학과 상당히 중복되며 미분기하학의 캘러(Kähler) 다양체론도 포함한다.
- **32K Generalizations of analytic spaces:** 무한 차원의 복소 다양체라든가 복소 다양체에 정칙함수와는 다른 함수의 이론을 연구하는 분야로서 근본적으로는 복소 기하학에서 어떤 다른 이론을 전개하기 위한 보조적 수단으로서 발전한 분야인데, 그 자체로서 흥미로운 연구 대상이 되기도 한다.
- **32L Holomorphic fiber spaces:** 복소 다양체위의 복소 다발(bundle)의 개념은 19세기에 여러 가지 복소 함수의 부정적분 이론에서 발전된 것이다. 이러한 다발의 성질을 연구하는 분야로서 물리학, 위상수학과 연결되어 있으며 복소 기하 연구의 전반에 걸쳐 중요한 도구로 발전하였다.
- **32M Complex spaces with a group of automorphisms:** 복소 기하학에서의 대칭성, 즉 군(group)의 작용을 연구하는 분야이다. 모든 기하학에서는 군론(group theory)과의 관계를 이해하는 것이 중요한데, 복소 기하학에서는 특히 기하학과 군론과의 관계가 다른 어떤 기하학에서 보다 깔끔하게 나타난다. 이런 이유로 이 분야는 리군론(Lie group theory)에서도 중요한 역할을 한다.
- **32N Automorphic functions:** 정수론과 표현이론에서 막대한 역할을 하고 있는

보형함수(automorphic functions)의 다변수 이론이다. 정수론의 해당 분야와 구분되는 점은 다변수 보형함수의 기하학적 해석학적 측면에 더 중점을 둔다는 것이다.

- **32P Non-Archimedean complex analysis:** 복소수가 논리적 관점에서 어떻게 정의되는지를 간략하게 살펴보면, 유리수로부터 시작하여 우리가 흔히 사용하는 절대값(아르키메데스 절대값이라고 부르기도 함)에 따라 채워 넣은 수가 실수이고 이것을 대수적으로 완전하게 만든 것이 복소수이다. 유리수에 우리가 보통 사용하는 절대값과는 전혀 다른 절대값을 정의할 수도 있는데, 자연수가 어떤 주어진 소수로 어떻게 나누어지는가에 따라 결정되는 절대값으로, 이것을 비(非)아르키메데스 절대값이라고 한다. 유리수를 비아르키메데스 절대값에 따라 채워 넣고 대수적으로 완전하게 만들면 복소수와는 다르나 개념적으로 유사한 수의 체계를 생각할 수 있다. 이러한 수의 체계에서 복소 기하학을 전개하는 것은 논리적, 구조적으로 자연스러운 일인데, 이러한 연구는 정수론, 대수기하학 등, 여러 가지 분야에서 중요한 도구가 되고 있다.
- **32Q Complex manifolds:** 복소 기하학에서 특히 복소 다양체를 연구한다는 것은 특이점이 없는 공간을 연구한다는 것으로 미적분의 도구를 원활히 사용할 수 있는 공간을 연구하는 것이다. 특히 구체적인 복소 다양체의 분류에 해당하는 주제인데 이 분야는 대수기하학과 상당히 중복된다.
- **32S Singularities:** 복소 해석적 공간의 특이점을 함수론과 연결시켜 연구하는 분야이다. 이 분야 역시 대수기하학과 상당히 중복된다.
- **32T Pseudoconvex domains:** 복소 영역 중에서 복소 함수론적으로 볼록한 영역은 함수론적으로 다양하고 풍부한 아름다운 성질을 갖는데 이로 인해 볼록한 영역의 연구는 특별히 중요한 하나의 주제로 자리 잡았다. 선형 편미분 방정식의 연구에도 지대한 영향을 미치고 있는 분야이다.
- **32U Pluripotential theory:** 앞에 언급했듯이 다변수 정칙 함수에서 파생되는 조화함수는 조화함수 중에서도 매우 특수한 함수인데 어떤 점에서 특수한가 하는 것을 연구하는 것이 매우 중요하다. 이런 일련의 연구는 다변수 복소 함수론에서 유별나게 등장하는 새로운 포텐샬 이론으로 발전했는데 이것이 pluripotential theory 이다.
- **32V CR manifolds:** 복소 다양체에 있는 영역의 경계 면에서 일어나는 기하학적 현상을 연구하는 분야로서 일변수 함수론에서는 등장하지 않는 현상이다. 본 호에 실린 이 분야의 전문가인 한종규 교수님의 글을 참조하시기 바란다.
- **32W Differential operators in several variables:** 다변수 복소 함수론에서 중요한 역할을 하는 편미분 방정식을 연구하는 분야로서 현대 편미분 방정식론의 발달에도 큰 영향을 미쳤다. 예를 들면, 해가 존재하지 않는 선형 편미분 방정식의 최초의 예가 발견된 것도 다변수 복소 함수론의 연구를 통해서였다.

여러 가지 연구 주제를 너무 수박 겉핥기 식으로 대충 나열만 하여 좀 산만하게 된 것 같은데, 이 각각의 주제에도 또 십여 가지씩의 소분야가 있다는 것을 염두에 두시기 바란다. 지면의 제약으로 복소 기하학과 같이 광범위한 학문을 심도 있게 소개하기는 힘들고, 이 산만한 글을 통해서 전하고 싶은 것은, 이 분야는 한 두 가지 큰 테마가 있어서 그것을 따라가는 연구를 하는 분야가 아니라 다변수 복소 함수를 연구하면서 나타나는 여러 다양한 현상과 문제를 여러 가지 관점에서 연구하는 분야라는 것이다. 이 분야를 공부하다 보면 수학과 물리학, 다른 자연 과학에도 지대한 영향을 미치는 큰 이론의 심오함을 맛보는 경우도 있는 반면, 하나의 작은 보석처럼 그 자체만으로도 혼자서 아름답게 빛나는 결과를 만날 수도 있다. 이러한 큰 이론과 작은 이론이 한데 어울려서 수학의 다른 많은 분야와 연결되며 전개되는 과정을 공부하는 것은 너무도 즐거운 일이다. 나아가 자신의 연구가 작게나마 이러한 과정에 공헌하고 있다는 것은 큰 보람이 아닐 수 없다.

## Profile

**황준묵 교수** 현재 고등과학원 수학부 교수이다. 서울대 물리학과를 졸업하고 미국 하바드대학원에서 수학 박사학위 취득 후 미국 노틀담대학교 조교수, 서울대학교 조교수를 역임하였다. 현재 복소 다양체의 기하학에 대한 연구를 수행하고 있다.